

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Рогожников Алексей Михайлович

**Решение смешанных задач и оптимизация
граничных управлений для уравнения
продольных колебаний составного стержня**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена на кафедре общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Научный руководитель:

Ильин Владимир Александрович,

доктор физико-математических наук, академик РАН

Крицков Леонид Владимирович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Официальные оппоненты:

Канатников Анатолий Николаевич,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (МГТУ имени Н.Э. Баумана)

Знаменская Людмила Николаевна,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Ведущая организация:

федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук»

Защита состоится «22» апреля 2015 года в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, ВМК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «___» _____ 2015 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 501.001.43,

доктор физико-математических наук, профессор

Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Главным предметом изучения в настоящей диссертационной работе является задача граничного управления продольными колебаниями в составном стержне, состоящем из конечного числа участков, на каждом из которых стержень обладает постоянными характеристиками. Исследуемые колебания описываются одномерным разрывным волновым уравнением.

Волновое уравнение является весьма общей математической моделью для большого числа физических процессов, описывающих механические колебания различных конструкций, колебания электромагнитного поля, распространение акустических волн в жидкостях и газах.

В приложениях возникают задачи, связанные с генерацией определенного режима колебаний в системе или с успокоением имеющихся нежелательных вибраций в различных конструкциях. Одним из часто применяемых методов для решения указанных задач является граничное управление, при котором посредством некоторых механизмов производится управление состоянием системы на границе (например, заданием смещения на конце или приложением силы) или какой-то её части. Отметим, что подобный подход не является единственно возможным и другое активно развивающееся направление — распределенное управление системами. Вне зависимости от типа управления ставится вопрос о возможности перевода системы из некоторого начального состояния в конечное; в исследуемом случае состояние (как начальное, так и конечное) описывается профилем смещения и профилем скорости.

Исследование задач управления системами с распределенными параметрами в данный момент представляет собой довольно обширный раздел математики. В круг вопросов, рассматриваемых обычно при изучении вопросов управления, входят возможность полного управления (т.е. разрешимость задач управления при произвольном конечном состоянии), условия на конечное (и начальное) состояние, при которых задача становится разрешима, а также поиск оптималь-

ного в каком-то смысле управления, если задача управления разрешима.

Волновое уравнение в этом плане исследовано весьма тщательно, и имеется множество результатов, касающихся разных случаев. Одними из первых и самых значимых являются результаты Ж. Л. Лионса¹, который предложил метод одновременного исследования задачи управления и задачи наблюдения, получивший название Hilbert Uniqueness Method (HUM). Указанный метод позволил исследовать многомерное волновое уравнение (одномерное входит как частный случай), кроме того, Лионсом был предложен способ синтеза граничного управления, основанный на методе HUM. Стоит отметить, что область применения разработанного подхода не ограничивается волновым уравнением: Лионс и его последователи многократно его обобщали на различные системы.

Другой результат, получивший в литературе название Geometric Control Condition (геометрическое условие управляемости), был представлен в статье² и описывает точные условия на подмножество границы системы, на котором производится граничное управление, и время управления, при которых задача граничного управления для многомерного волнового уравнения становится разрешима.

В работах^{3,4} Ф. П. Васильева и соавторов задачи граничного управления изучаются в свете новой интерпретации двойственности линейных задач управления и наблюдения, предложенной в статье⁵. В указанных работах разработаны методы численного построения решения и показана их сходимость. Отдельно

¹ Lions J.L. *Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems* // *SIAM Review*, 1988, vol. 30, № 1. pp. 1–68.

² Bardos C., Lebeau G., Rauch J. *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary* // *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1992, vol. 30, № 5, pp. 1024–1065.

³ Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М. *Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнения колебаний струны* // *Вестник МГУ, сер. 15, вычислительная математика и кибернетика*, 1993, № 3, с. 8–15.

⁴ Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М., Разгулин А. В. *Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения*. М.: Макс пресс, 2010.

⁵ Васильев Ф. П. *О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения* // *Дифференциальные уравнения*, 1995, т. 31, № 11, с. 1893–1900.

отметим впервые представленные в работе⁶ М. М. Потаповым взаимодвойственные аппроксимации двойственных задач, для которых была доказана сходимость решений не только по невязке, но и по аргументу.

Другой, более наивный, подход к численному решению задачи управления системы с распределенными параметрами, состоит в применении пространственной дискретизации уравнения, т.е. замене дифференциального уравнения в частных производных достаточно большой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, после чего задача управления формулируется для полученной дискретизации и применяются хорошо известные методы оптимального управления системами дифференциальных уравнений. Этот подход довольно активно развивается Э. Зуазуа. В своей статье⁷ он описывает проблемы, с которыми сталкивается этот подход на примере одномерного волнового уравнения: полученные численно управления расходятся при уменьшении шага пространственной сетки. Им были объяснены причины этого явления и предложены различные регуляризации задачи, которые он последовательно исследовал в работах^{7,8,9}.

Результаты по смешанным задачам и задачам граничного управления для уравнения колебаний в системах с кусочно-постоянными характеристиками в основном касаются уравнений на квазиодномерных системах (уравнения на графах, как часто называют этот раздел). Задачи, рассматривавшиеся авторами, весьма близки к теме настоящей диссертации, поскольку поведение решений смешанных задач крайне похоже (в частности, в обоих случаях пространство

⁶ Потапов М. М. О сильной сходимости разностных аппроксимаций задач граничного управления и наблюдения для волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1998, т. 38, № 3, с. 387–397.

⁷ Zuazua E. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods // SIAM review, 2005, vol. 47, №. 2, pp. 197–243.

⁸ Zuazua E. Optimal and approximate control of finite-difference approximation schemes for the 1-D wave equation // Rendiconti di Matematica, Serie VII, 2004, vol. 24, №. 2, pp. 201–237.

⁹ Marica A., Zuazua E. On the Quadratic Finite Element Approximation of 1D Waves: Propagation, Observation, Control, and Numerical Implementation // The Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) Condition. – Birkhäuser Boston, 2013, pp. 75–99.

делится на участки, на каждом из которых имеется однородное волновое уравнение, а в точках соприкосновения участков действуют определенные условия сопряжения). С одной стороны, рассматриваемая в настоящей работе задача об управлении колебаниями стержня может быть сведена к задаче на линейном графе, с другой стороны, предлагаемый в диссертации подход к решению смешанных задач и построению граничного управления может быть обобщен для произвольных графов. Перечислим некоторые известные результаты этой области.

В работах^{10,11,12} исследовалась точная и приближенная граничная управляемость волнового уравнения на графе, были установлены достаточные условия на спектр оператора Лапласа на графе, при которых указанные задачи разрешимы.

К. Аммери и соавторами было доказано убывание со временем решения волнового уравнения на древесном графе^{13,14}, если на одном из концов наложить поглощающее граничное условие, дополнительно потребовав взаимной иррациональности времен прохождения сигнала по разным участкам (результаты подобного рода в литературе называются стабилизацией решения).

В работе Шмидта¹⁵ введено графическое правило (правило расстановки знаков), позволяющее установить разрешимость задачи управления для линеаризованного уравнения плоских колебаний двумерной сети из струн.

¹⁰ Dáger R., Zuazua E. *Spectral boundary controllability of networks of strings* // *Comptes Rendus Mathématique*, 2002, vol. 334, №. 7, pp. 545–550.

¹¹ Dáger R. *Observation and control of vibrations in tree-shaped networks of strings* // *SIAM journal on control and optimization*, 2004, vol. 43, №. 2, pp. 590–623.

¹² Zuazua E. *Control and stabilization of waves on 1-d networks* // *Modelling and Optimisation of Flows on Networks*. – Springer Berlin Heidelberg, 2013. – pp. 463–493.

¹³ Ammari K., Jellouli M. *Remark on stabilization of tree-shaped networks of strings* // *Applications of Mathematics*, 2007, vol. 52, №. 4, pp. 327–343.

¹⁴ Ammari K., Jellouli M., Khenissi M. *Stabilization of generic trees of strings* // *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2005, vol. 11, №. 2, pp. 177–193.

¹⁵ Schmidt E. J. P. G. *On the modelling and exact controllability of networks of vibrating strings* // *SIAM journal on control and optimization*, 1992, vol. 30, №. 1, pp. 229–245.

В. А. Ильиным и Е. И. Моисеевым был разработан подход к управлению одномерным волновым уравнением, основанный на получении явного вида решения смешанной задачи путем полного учета отраженных волн. Полученные результаты опубликованы авторами в цикле работ и кратко изложены в статье¹⁶. Ими и их учениками исчерпывающим образом было изучено^{17,18,19,20} волновое уравнение, описывающее продольные колебания однородного стержня: в замкнутой форме приведены обобщенные решения смешанных задач с различными классическими и нелокальными граничными условиями, с использованием которых построены граничные управления. Поскольку при достаточно большом времени управления решение задачи управления неединственно, то отыскивались оптимальные управления в смысле минимизации интеграла граничной энергии. Обобщенные решения искали в классе, требующем наличия конечной энергии.

В монографии²¹ Л. Н. Знаменской систематически изложены результаты по управлению колебаниями однородного стержня с классическими граничными условиями за критическое время, там же приводится история развития задачи об управлении одномерными упругими колебаниями, описываются применявшиеся методы решения и указаны примеры приложений, приводящих к подобным постановкам.

Помимо перечисленных задач рассматривались постановки для разрыв-

¹⁶ Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // *Успехи математических наук*, 2005, т. 60, вып. 6, с. 89–114.

¹⁷ Моисеев Е. И., Тихомиров В. В. О волновом процессе с конечной энергией при заданном граничном режиме на одном конце и упругом закреплении на другом конце // *Нелинейная динамика и управление*. — т. 5. — Физматлит Москва, 2007, с. 141–148.

¹⁸ Никитин А. А., Кулешов А. А. Оптимизация граничного управления, производимого третьим краевым условием // *Дифференциальные уравнения*, 2008, т. 44, № 5, с. 681–690.

¹⁹ Ильин В. А. Оптимизация граничного управления на одном конце струны при наличии модельного нелокального граничного условия // *Дифференциальные уравнения*, 2008, т. 44, № 11, с. 1487–1498.

²⁰ Кулешов А. А. О четырех смешанных задачах для уравнения колебаний струны с однородными нелокальными условиями // *Дифференциальные уравнения*, 2009, т. 45, № 6, с. 810–817.

²¹ Знаменская Л. Н. Управление упругими колебаниями. — М.: Физматлит, 2004. — 176 с.

ного волнового уравнения: отметим работу²², где представлены оптимальные граничные управления для стержня, состоящего из двух участков с одинаковыми импедансами. Также В. А. Ильиным была решена²³ смешанная задача и задача управления за минимальный промежуток времени для стержня, состоящего из двух участков при условии равенства времени прохождения сигнала по каждому из них.

Возможность построения управлений вызвала интерес к получению в замкнутой форме решений смешанных задач. А. А. Кулешовым^{24,25} были предъявлены решения смешанных задач для колебаний стержня, состоящего из двух участков, возбуждаемых граничными условиями первого и второго рода, без дополнительных ограничений. Указанное решение записано в виде суммы с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами. В статье²⁶ О. В. Коровиной, В. Л. Прядиева представлено решение начально-краевой задачи на графе при однородных граничных условиях Дирихле и Неймана с использованием суммирования по некоторому множеству ломаных на этом графе.

В работах А. В. Боровских^{27,28} исследовались колебания неоднородной стру-

²² Ильин В. А., Луференко П. В. Аналитический вид оптимальных граничных управлений продольными колебаниями стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и упругости, но одинаковые импедансы // Доклады Академии наук, 2009, т. 429, № 4, с. 455–458.

²³ Ильин В. А. О полном успокоении с помощью граничного управления на одном конце колебаний неоднородного стержня // Труды ин-та математики и механики УрО РАН, 2011, т. 17, № 2, с. 88–96.

²⁴ Кулешов А. А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Доклады Академии наук, 2012, т. 442, № 4, с. 451–454.

²⁵ Кулешов А. А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости // Доклады Академии наук, 2012, т. 442, № 5, с. 594–597.

²⁶ Коровина О. В., Прядиев В. Л. Структура решения смешанной задачи для волнового уравнения на компактном геометрическом графе в случае ненулевой начальной скорости // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика, 2009, т. 9, № 3, с. 37–46.

²⁷ Боровских А. В. Формулы граничного управления неоднородной струной I // Дифференциальные уравнения, 2007, т. 43, № 1, с. 64–89.

²⁸ Боровских А. В. Формулы граничного управления неоднородной струной II // Дифференциальные уравнения. 2007, т. 43, № 5, с. 640–649.

ны с плавно изменяющимися характеристиками материала. При времени управления, не превышающем времени прохождения сигнала, были установлены необходимые и достаточные условия для разрешимости задачи, а также представлено граничное Дирихле-управление.

Близкая к теме настоящей работы задача была рассмотрена А. И. Егоровым и Л. Н. Знаменской в работах^{29,30}, где исследовалась управляемость разрывного волнового уравнения при помощи воздействия управляющим объектом с сосредоточенными параметрами в одной из точек соединения. Авторам удалось доказать управляемость системы при дополнительных условиях согласования, однако предложенная техника ведет к громоздким вычислениям, которые необходимо проделать вручную.

Цель диссертационной работы. В свете перечисленных выше работ приобретают актуальность следующие задачи.

Во-первых, важным представляется получение универсальной формы решения в явном виде для широкого класса смешанных задач, включающего как частные случаи большую часть уже рассмотренных.

Во-вторых, вызывает интерес использование полученных формул для решения задач граничного управления, в частности, для получения явного вида оптимальных граничных управлений в смысле минимизации интеграла граничной энергии.

Основные результаты работы.

1. В настоящей работе представлено обобщенное решение смешанной задачи, описывающей продольные колебания стержня, состоящего из произвольного конечного числа участков, на каждом из которых характеристики

²⁹ Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2011, т. 17, № 1, с. 85–92.

³⁰ Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управляемости упругих колебаний системы последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами со свободными границами // Труды Московского физико-технического института, 2012, т. 4, № 4, с. 62–68.

(плотность и модуль Юнга) постоянны, также допускается, чтобы в стыках между участками находились прикрепленные к стержню точечные массы. Колебания в изначально покоящемся стержне вызываются граничными условиями первого, второго, третьего рода или произвольной их комбинацией. Доказана единственность полученного решения.

2. Разработан новый подход к получению явного вида решений смешанных задач с использованием компактной матричной формы записи.
3. Существенно опираясь на полученный явный вид решения, были исследованы задачи управления колебаниями составного стержня без точечных масс, подчиненного условию равенства времени прохождения сигнала по каждому из участков. Управление производится смещением с двух концов, либо смещением с левого конца при закрепленном правом. Для указанных задач представлены оптимальные в смысле минимизации интеграла граничной энергии управления за промежутки времени, кратные времени прохождения сигнала по одному участку.

Методы исследования. В работе используется теория дифференциальных уравнений, матричный анализ, метод множителей Лагранжа, метод сжимающих отображений.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность работы. Разработан общий метод построения решения смешанной задачи для разрывного уравнения колебаний с классическими линейными граничными условиями. Продемонстрирована возможность решения задач оптимального граничного управления колебаниями с помощью найденных формул. Стоит отметить, что полученная форма решения смешанной задачи может быть использована для численного моделирования колебаний.

Апробация работы. Результаты работы были представлены в виде докладов на конференциях и семинарах:

- международная научная конференция «Ломоносов», Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2012 и 2013 гг.;
- научная конференция «Тихоновские чтения», факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, октябрь 2013 г.;
- научный семинар кафедры оптимального управления ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством Ф. П. Васильева;
- научный семинар кафедры математического моделирования ИАВТ МЭИ по дифференциальным уравнениям.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–5], из которых работы [1–4] опубликованы в журналах, входящих в список ВАК. Все результаты, вошедшие в диссертацию и в перечень опубликованных работ, получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 101 страница. Библиография содержит 75 наименований.

Содержание работы

В первой главе исследуется классическая постановка смешанной задачи о возбуждении колебаний в составном стержне, а также вводится ряд понятий, необходимых для записи решения.

Рассматриваются колебания стержня, состоящего из n последовательно соединенных участков, при этом на i -том участке ($i = 1, 2, \dots, n$), расположенном на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, стержень обладает постоянными плотностью ρ_i , модулем Юнга k_i и скоростью распространения сигнала (скоростью звука) $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$. К стыкам участков x_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$ прикреплены точечные массы $m_i \geq 0$ (случай $m_i = 0$ означает отсутствие массы). Множество точек стыка, где массы положительны, обозначим через X , а множество остальных точек стыка обозна-

чим через Y . Продольные колебания такого стержня, испытывающего воздействие внешней силы с плотностью $f(x, t)$, описываются разрывным волновым уравнением

$$u_{tt} = a_i^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{в прямоугольнике } Q_i = (x_{i-1}, x_i) \times (0, T), \quad i \in \overline{1, n} \quad (1)$$

и удовлетворяют условиям сопряжения в точках стыка $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ при $t \in [0, T]$

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t) \quad (2)$$

$$m_i u_{tt}(x_i, t) = k_{i+1} u_x(x_i + 0, t) - k_i u_x(x_i - 0, t), \quad (3)$$

стержень считаем изначально покоящимся

$$u(x, 0) \equiv 0 \quad u_t(x, 0) \equiv 0 \quad x \in [x_0, x_n]. \quad (4)$$

Полагается наложенным одно из линейных граничных условий на левом конце:

- Управление смещением (I род)

$$u(x_0, t) = \mu(t). \quad (L_I)$$

- Управление силой (II род)

$$u_x(x_0, t) = \mu(t). \quad (L_{II})$$

- Управление упругим закреплением (III род)

$$u_x(x_0, t) - h_1 u(x_0, t) = \mu(t), \quad \text{где } h_1 > 0. \quad (L_{III})$$

Аналогично на правом конце полагаем наложенным одно из граничных условий

- Управление смещением (I род)

$$u(x_n, t) = \nu(t). \quad (R_I)$$

- Управление силой (II род)

$$-u_x(x_n, t) = \nu(t). \quad (\text{R}_{\text{II}})$$

- Управление упругим закреплением (III род)

$$-u_x(x_n, t) - h_2 u(x_n, t) = \nu(t), \text{ где } h_2 > 0. \quad (\text{R}_{\text{III}})$$

Для указанной смешанной начально-краевой задачи доказана единственность классического решения, принадлежащего классу $C^2(Q_i) \cap C^1(\overline{Q}_i)$ в каждом прямоугольнике Q_i , и представлен явный вид решения смешанной задачи с однородными граничными условиями $\mu(t)$, $\nu(t)$ и ненулевой правой частью $f(x, t)$, от которой требуется принадлежность классу $C^1(\overline{Q})$ и принадлежность её носителя объединению незамкнутых прямоугольников $\bigcup_{i=1}^n Q_i$. Эта вспомогательная теорема используется во второй главе для доказательства единственности обобщенного решения.

Введем метрическое линейное пространство V , состоящее из непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, причем таких, что для каждой функции $f(t)$ из V существует число $t_0 \in \mathbb{R}$, что $f(t) = 0$ при $t \leq t_0$. Расстояние между двумя функциями $x, y \in V$ задается следующим образом

$$\rho(x, y) = \begin{cases} e^{-t_{inf}}, & t_{inf} = \inf\{t \in \mathbb{R} : x(t) \neq y(t)\} & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Также вводятся пространство V^n векторов длины n , компонентами которых являются функции из V , и метрика на этом пространстве:

$$\rho_n(x, y) = \max_{j \in \overline{1, n}} \rho(x_j, y_j) \quad x, y \in V^n.$$

Для $\rho(\cdot, \cdot)$, $\rho_n(\cdot, \cdot)$ доказан ряд свойств, важнейшее из которых — полнота пространств V , V^n относительно соответствующих метрик. Введена операция умножения матрицы на вектор из пространства V^n :

Определение 1. Пусть $f = [f_1 \dots f_n]^T \in V^n$, а матрица $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Вектор $g = [g_1 \dots g_m]^T \in V^m$, элементы которого определены как $g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$, назовем их произведением. Операцию будем записывать как $g = Af$. Договоримся, что вместо числа в некоторых клетках матрицы могут стоять операторы, действующие в пространстве V . При этом, если в ячейке вместо a_{ij} стоит оператор L_{ij} , то вместо $a_{ij} f_j$ в линейной комбинации должен стоять результат применения оператора $L_{ij} f_j$.

Помимо этого определим несколько операторов, действующих во введенных пространствах:

Определение 2 (оператор запаздывания). Оператор запаздывания P_τ ($\tau \in \mathbb{R}$) действует на $f \in V$ следующим образом:

$$g = P_\tau f, \quad g(t) = f(t - \tau) \quad g \in V.$$

Для нас будет важен оператор запаздывания, действующий на элементы пространства V^n :

$$P \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{t_1} f_1 \\ P_{t_2} f_2 \\ \vdots \\ P_{t_n} f_n \end{bmatrix}.$$

В этой формуле n — количество участков в стержне, а t_i — время прохождения сигналом i -того участка. Именно такой конкретный оператор P будет использоваться в дальнейшем.

Определение 3. Пусть $\beta > 0$, $f \in V$, оператором эха назовем оператор E_β , строящий отраженную волну по пришедшей при граничном условии третьего рода и действующий следующим образом:

$$(E_\beta f)(t) = f(t) - 2\beta \int_0^{+\infty} f(t - \tau) e^{-\beta\tau} d\tau.$$

Эквивалентная форма действия этого оператора (звездочкой обозначена операция свертки, $\theta(t)$ — функция Хевисайда):

$$E_\beta f = f - 2\beta\theta(t)e^{-\beta t} * f.$$

Определение 4 (операторы преломления и отражения). Пусть i и j — номера соседних участков, m — масса точечного груза в соединяющем их стыке. Тогда операторы отражения $\widehat{R}_{ij}$ и преломления $\widehat{T}_{ij}$ действуют на $f \in V$ следующим образом:

$$\widehat{T}_{ij} f = \begin{cases} \frac{2z_i}{m} f * \theta(t) e^{-(z_i+z_j)t/m}, & m > 0 \\ \frac{2z_i}{z_i+z_j} f, & m = 0 \end{cases}$$

$$\widehat{R}_{ij} f = \widehat{T}_{ij} f - f.$$

Коэффициенты z_i, z_j — импедансы соответствующих участков

$$z_i = a_i \rho_i = \sqrt{k_i \rho_i} = k_i / a_i.$$

Во второй главе изучаются продольные колебания, возбуждаемые в изначально покоящемся составном стержне неоднородными граничными условиями первого, второго или третьего рода. Правая часть волнового уравнения при этом полагается нулевой: $f(x, t) \equiv 0$. Используется класс $\widehat{W}_2^1(\overline{\mathcal{D}})$, введенный В. А. Ильиным:

Определение 5. Пусть $\mathcal{D} = (a < x < b) \times (t_1 < t < t_2)$ — прямоугольник на плоскости (x, t) . Класс $\widehat{W}_2^1(\overline{\mathcal{D}})$ состоит из непрерывных в $\overline{\mathcal{D}}$ функций, обобщенные производные которых $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$ принадлежат не только классу $L_2(\mathcal{D})$, но и классу $L_2[a \leq x \leq b]$ при всех $t \in [t_1, t_2]$ и классу $L_2[t_1 \leq t \leq t_2]$ при всех $x \in [a, b]$.

Определение 6. Введем класс $\overline{W}_2^1$, от функций которого потребуем принадлежность классу $\widehat{W}_2^1(\overline{Q}_i)$ при $i = 1, 2, \dots, n$, а также принадлежность классу $W_2^2(0 \leq t \leq T)$ при $x \in X$, т.е. в нагруженных точках стыка.

Определение 7. Обобщенным решением смешанной задачи (1)–(4) с нулевой правой частью $f(x, t) \equiv 0$, одним из граничных условий (L_I)–(L_{III}) на левом конце и одним из условий (R_I)–(R_{III}) на правом назовем функцию $u(x, t)$ из класса $\overline{W}_2^1$, удовлетворяющую условию $u(x, 0) \equiv 0$ при $x \in [x_0, x_n]$, условию $u_t(x_i, 0) = 0$ при $x_i \in X$, т.е. в нагруженных точках стыка, и следующему интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \iint_{Q_i} \rho_i u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - a_i^2 \Phi_{xx}(x, t)] dx dt + \\ & + \sum_{x_i \in X} \int_0^T [m_i \Phi(x_i, t) u_{tt}(x_i, t) - u(x_i, t) (k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) - k_i \Phi_x(x_i - 0, t))] dt + \\ & + \begin{cases} \int_0^T [-k_1 \mu(t) \Phi_x(x_0, t)] dt & \text{при условии (L}_I\text{)} \\ \int_0^T [k_1 \mu(t) \Phi(x_0, t)] dt & \text{при условии (L}_{II}\text{)} \\ \int_0^T [k_1 \mu(t) \Phi(x_0, t)] dt & \text{при условии (L}_{III}\text{)} \end{cases} + \\ & + \begin{cases} \int_0^T [k_n \nu(t) \Phi_x(x_n, t)] dt & \text{при условии (R}_I\text{)} \\ \int_0^T [-k_n \nu(t) \Phi(x_n, t)] dt & \text{при условии (R}_{II}\text{)} \\ \int_0^T [-k_n \nu(t) \Phi(x_n, t)] dt & \text{при условии (R}_{III}\text{)} \end{cases} = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

для любой «пробной» функции $\Phi(x, t)$, непрерывной в замыкании $\overline{Q}$ прямоугольника $Q = (x_0, x_n) \times (0, T)$, принадлежащей классу $C^2(Q_i) \cap C^1(\overline{Q}_i)$ в каждом прямоугольнике Q_i , удовлетворяющей следующим ограничениям в финальный момент времени

$$\Phi(x, T) \equiv 0 \quad \Phi_t(x, T) \equiv 0, \quad (6)$$

условиям на концах стержня в соответствии с наложенными граничными усло-

виями:

$$\Phi(x_0, t) \equiv 0 \quad \text{при условии } (L_I)$$

$$\Phi_x(x_0, t) \equiv 0 \quad \text{при условии } (L_{II})$$

$$\Phi_x(x_0, t) - h_1 \Phi(x_0, t) \equiv 0 \quad \text{при условии } (L_{III})$$

$$\Phi(x_n, t) \equiv 0 \quad \text{при условии } (R_I)$$

$$\Phi_x(x_n, t) \equiv 0 \quad \text{при условии } (R_{II})$$

$$\Phi_x(x_n, t) + h_2 \Phi(x_n, t) \equiv 0 \quad \text{при условии } (R_{III}),$$

а также условию согласования в точках безмассового стыка:

$$0 = k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) - k_i \Phi_x(x_i - 0, t), \quad x_i \in Y.$$

В зависимости от типа граничного условия на левом конце наложим требования на $\mu(t)$:

- При граничном условии первого рода потребуем принадлежности $\mu(t)$ классу $W_2^1[0, T]$ и согласования с начальными данными: $\mu(0) = 0$.
- При граничном условии второго или третьего рода потребуем принадлежности классу $L_2[0, T]$.

В полной аналогии наложим требования на $\nu(t)$ в зависимости от типа граничного условия на правом конце:

- При граничном условии первого рода потребуем принадлежности $\nu(t)$ классу $W_2^1[0, T]$ и согласования с начальными данными: $\nu(0) = 0$.
- При граничном условии второго или третьего рода потребуем принадлежности классу $L_2[0, T]$.

Доказаны теоремы:

Теорема 1. *Смешанная задача (1)–(4) с одним из граничных условий (L_I) – (L_{III}) на левом конце и одним из условий (R_I) – (R_{III}) на правом имеет единственное обобщенное решение из класса $\overline{W}_2^1$.*

Теорема 2. Единственное обобщенное из класса $\overline{W}_2^1$ решение задачи (1)–(4) с нулевой правой частью, одним из граничных условий (L_I)–(L_{III}) и одним из условий (R_I)–(R_{III}) при **четном** числе участков n имеет следующий вид в прямоугольнике $\overline{Q}_i$:

$$u(x, t) = \begin{cases} U_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \tilde{U}_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{при } i - \text{нечетных} \\ \tilde{U}_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + U_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{при } i - \text{четных,} \end{cases} \quad (7)$$

где функции $U_1 \dots U_n, \tilde{U}_1 \dots \tilde{U}_n$, определяются из соотношений

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} AP(BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы A и B размера $n \times n$ определены формулами

$$A = \begin{bmatrix} J_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{34} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-1,n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \hat{R}_{left} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{R}_{right} \end{bmatrix},$$

где блок J_{ij} размера 2×2 составлен из операторов отражения и преломления:

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{ij} & \hat{T}_{ji} \\ \hat{T}_{ij} & \hat{R}_{ji} \end{bmatrix},$$

а операторы $\widehat{R}_{left}$ и $\widehat{R}_{right}$ формируют профиль волны, отраженной соответственно левым или правым концом, по пришедшей волне. Они определены следующим образом

$$\widehat{R}_{left} f = \begin{cases} -f & \text{при условии } (L_I) \\ f & \text{при условии } (L_{II}) \\ E_{a_1 h_1} f & \text{при условии } (L_{III}) \end{cases}$$

$$\widehat{R}_{right} f = \begin{cases} -f & \text{при условии } (R_I) \\ f & \text{при условии } (R_{II}) \\ E_{a_n h_2} f & \text{при условии } (R_{III}). \end{cases}$$

Через $\underline{\mu}$ и $\underline{\nu}$ обозначены волны, порожденные граничными условиями соответственно на левом и правом концах. В зависимости от типа граничного условия они определяются следующим образом на сегменте $t \in [0, T]$:

$$\underline{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t) & \text{при условии } (L_I) \\ -a_1 \int_0^t \mu(\tau) d\tau & \text{при условии } (L_{II}) \\ -a_1 \int_0^t e^{-a_1 h_1(t-\tau)} \mu(\tau) d\tau & \text{при условии } (L_{III}) \end{cases}$$

$$\underline{\nu}(t) = \begin{cases} \nu(t) & \text{при условии } (R_I) \\ -a_n \int_0^t \nu(\tau) d\tau & \text{при условии } (R_{II}) \\ -a_n \int_0^t e^{-a_n h_2(t-\tau)} \nu(\tau) d\tau & \text{при условии } (R_{III}). \end{cases}$$

Вне зависимости от типов граничных условий продолжим функции $\underline{\mu}(t)$ и $\underline{\nu}(t)$ нулем при $t < 0$ и произвольным непрерывным образом на полуось $t > T$, чтобы полученные функции лежали в классе V .

Теорема 3. Для задачи (1)–(4) с одним из граничных условий (L_I) – (L_{III}) и одним из условий (R_I) – (R_{III}) при **нечетном** числе участков n решение из класса

$\overline{W}_2^1$ определяется по формуле (7), где функции $U_1, \dots, U_n, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n$ определены соотношениями

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} BP(APBP)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} AP(BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} (APBP)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu} \end{pmatrix}$$

с матрицами A и B размера $n \times n$, имеющими вид

$$A = \begin{bmatrix} J_{12} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \hat{R}_{right} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \hat{R}_{left} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-1,n} \end{bmatrix}.$$

В **третьей главе** изложен метод построения решений смешанных задач, приводящий к такому виду решения, объясняется роль введенных метрических пространств. Рассуждения проиллюстрированы на нескольких примерах.

В **четвертой главе** изучаются вопросы управления колебаниями в составном стержне. В этой главе предполагается, что в точках стыка отсутствуют точечные массы, время прохождения сигнала по каждому из участков одинаково (обозначим его через s), а на концах стержня наложены граничные условия Дирихле. Исследуются следующие две задачи управления:

Задача граничного управления I. Требуется найти управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, которые переводят изначально покоящийся стержень в конечное состояние

$$u(x, T) = \varphi(x), \quad u_t(x, T) = \psi(x) \quad x \in [x_0, x_n] \quad (8)$$

за промежуток времени T . Описывающие конечное состояние функции принадлежат классам: $\varphi(x) \in W_2^1[x_0, x_n]$, $\psi(x) \in L_2[x_0, x_n]$.

Задача граничного управления II. Будем полагать правый конец зафиксированным, т.е. функция $\nu(t)$, имеющая смысл смещения правого конца стержня, полагается нулевой: $\nu(t) \equiv 0$. Требуется найти управление $\mu(t)$, переводящее стержень из состояния покоя в конечное состояние (8), подчиненное условию согласования $\varphi(x_n) = 0$.

Управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ ищутся в классе функций, допустимых с точки зрения смешанной задачи: от них требуется принадлежность классу $W_2^1[0, T]$ и равенство нулю в начальный момент времени $\mu(0) = \nu(0) = 0$. Поскольку при достаточно большом времени управления решение указанных задач неединственно, то отыскивается оптимальное, т.е. такое, которое минимизирует интеграл граничной энергии, имеющий вид

$$J = \int_0^T (\mu'(t))^2 dt + \int_0^T (\nu'(t))^2 dt$$

для задачи граничного управления I и следующий вид для задачи граничного управления II

$$J = \int_0^T (\mu'(t))^2 dt.$$

При решении существенным образом используется полученный во второй главе вид решения смешанной задачи, который преобразуется с учетом ограничений, принятых в этой главе. Выражения для функций U_i , $\tilde{U}_i$ принимают следующий вид, справедливый как при четном, так и при нечетном числе участ-

КОВ n :

$$\begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_n(t) \\ \tilde{U}_1(t) \\ \tilde{U}_2(t) \\ \dots \\ \tilde{U}_n(t) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\lceil t/s \rceil - 1} C^m [\mu(t - ms)p + \nu(t - ms)q],$$

где матрица C размера $2n \times 2n$ составлена из уже введенных матриц A и B , которые при ограничениях, принятых в настоящей главе, могут рассматриваться как числовые:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{bmatrix},$$

а p и q — векторы длины $2n$:

$$\begin{aligned} p_i &= \delta_{i,1} \\ q_i &= \begin{cases} \delta_{i,n} & \text{при четном } n \\ \delta_{i,2n} & \text{при нечетном } n \end{cases}. \end{aligned}$$

Из финальных условий следуют равенства для функций $U_i, \tilde{U}_i$ при $\tau \in [0, s]$:

$$\begin{aligned} U'_i(T - \tau) &= \frac{1}{2} \times \begin{cases} \psi(x_{i-1} + \tau a_i) - a_i \varphi'(x_{i-1} + \tau a_i) & \text{при нечетных } i \\ \psi(x_i - \tau a_i) + a_i \varphi'(x_i - \tau a_i) & \text{при четных } i \end{cases} \\ \tilde{U}'_i(T - \tau) &= \frac{1}{2} \times \begin{cases} \psi(x_i - \tau a_i) + a_i \varphi'(x_i - \tau a_i) & \text{при нечетных } i \\ \psi(x_{i-1} + \tau a_i) - a_i \varphi'(x_{i-1} + \tau a_i) & \text{при четных } i \end{cases}, \end{aligned}$$

правые части которых являются функциями, непосредственно вычисляемыми из финальных данных. Обозначим их соответственно через $\alpha_i(\tau)$, $\alpha_{n+i}(\tau)$. Введем следующий вектор

$$\bar{\alpha}(\tau) = [\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau), \dots, \alpha_n(\tau), \alpha_{n+1}(\tau), \alpha_{n+2}(\tau), \dots, \alpha_{2n}(\tau)]^T.$$

Предположим также, что время управления T кратно времени прохождения сигнала по каждому из участков $T = ks$. Функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ зададим в виде системы функций из класса L_2 , каждая из которых задает производную функции на некотором промежутке. Временной интервал разбивается на промежутки $[T - (m + 1)s, T - ms]$, $m = 0, 1, \dots, k - 1$:

$$\begin{aligned}\mu'(T - t - ms) &= \mu_m(t) & 0 \leq m \leq k - 1, t \in [0, s] \\ \nu'(T - t - ms) &= \nu_m(t) & 0 \leq m \leq k - 1, t \in [0, s].\end{aligned}$$

В совокупности с условиями согласования $\mu(0) = \nu(0) = 0$ введенная система функций однозначно задает функции $\mu(t)$, $\nu(t)$.

Задачи граничного управления далее формулируются в терминах $\mu_m(t)$, $\nu_m(t)$. Вводятся матрица E_k размера $2n \times 2k$ и матрица F_k размера $2n \times k$, имеющие следующий вид в записи по столбцам:

$$E_k = [p, Cp, \dots, C^{k-1}p, q, Cq, \dots, C^{k-1}q]$$

$$F_k = [p, Cp, \dots, C^{k-1}p].$$

Также вводятся вектор $\overline{\mu\nu}(\tau)$ длины $2k$, вектор $\overline{\mu}(\tau)$ длины k :

$$\overline{\mu\nu}(\tau) = [\mu_0(\tau), \mu_1(\tau), \dots, \mu_{k-1}(\tau), \nu_0(\tau), \nu_1(\tau), \dots, \nu_{k-1}(\tau)]^T$$

$$\overline{\mu}(\tau) = [\mu_0(\tau), \mu_1(\tau), \dots, \mu_{k-1}(\tau)]^T$$

и вспомогательный вектор $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ длины $2k$.

Доказаны вспомогательные утверждения о свойствах введенных матриц C , E_k и F_k , при помощи которых доказываются следующие две теоремы о виде оптимальных граничных управлений:

Теорема 4. Для времени управления $T = ks$ при $k \geq 2n$ функции μ_m , определяющие оптимальное решение задачи граничного управления Π , задаются соотношением

$$\overline{\mu}(\tau) = F_k^T (F_k F_k^T)^{-1} \overline{\alpha}(\tau).$$

Теорема 5. Для времени управления $T = ks$ при $k > n$ функции μ_m и ν_m , определяющие оптимальное решение задачи граничного управления I , задаются соотношением

$$\overline{\mu\nu}(\tau) = \frac{1}{2}\lambda_1(E_k^T(E_kE_k^T)^{-1}E_ke - e) + E_k^T(E_kE_k^T)^{-1}\overline{\alpha}(\tau),$$

где константа λ_1 определяется из уравнения

$$\frac{1}{2}\lambda_1s \left[((E_kE_k^T)^{-1}E_ke, E_ke) - (e, e) \right] = \varphi(x_0) + \varphi(x_n) - \int_0^s (E_k^T(E_kE_k^T)^{-1}\overline{\alpha}(\tau), e) d\tau.$$

При $k = n$ решение задачи управления I единственно, существует тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x_0) + \varphi(x_n) - \int_0^s (E_k^T(E_kE_k^T)^{-1}\overline{\alpha}(\tau), e) d\tau = 0,$$

и определяется формулой

$$\overline{\mu\nu}(\tau) = E_k^T(E_kE_k^T)^{-1}\overline{\alpha}(\tau).$$

Автор глубоко благодарен В. А. Ильину за постоянное внимание, поддержку в работе и несомненно полезные советы.

Автор благодарит Л. В. Крицкова за поддержку и помощь при подготовке диссертации.

Также автор выражает благодарность А. А. Кулешову за обсуждения рассматриваемых задач и интерес к полученным результатам.

Автор очень признателен Т. Н. Лихоманенко за полезные обсуждения, неугасающее внимание к работе на всех её этапах и неоценимую поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Рогожников А.М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Доклады Академии наук, 2011, том 441, №4, с. 449-451.
2. *Рогожников А.М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Доклады Академии наук, 2012, том 444, №5, с. 488-491.
3. *Рогожников А.М.* Оптимальное управление продольными колебаниями составных стержней с равным временем прохождения волны по каждому из участков // Дифференциальные уравнения, 2013, том 49, №5, с. 633-642.
4. *Рогожников А.М.* Смешанная задача о возбуждении колебаний в составном стержне с присоединенными точечными массами // Доклады Академии наук, 2013, том 450, №4, с. 389-392.
5. *Рогожников А.М.* О различных типах граничных условий для одномерного уравнения колебаний // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ, 2013, том 10, с. 188-214.