УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

На правах рукописи
УДК 517.9

Тиморин Владлен Анатольевич

ДИНАМИКА И ГЕОМЕТРИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Специальность
01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на факультете математики национального исследовательского университета Высшая Школа Экономики

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
А.А. Аграчев,

доктор физико-математических наук,
профессор Ю.С. Ильяшенко,

доктор физико-математических наук,
профессор Г.Б. Шабат,

Ведущая организация:
Петербургское отделение математического института РАН

Защита состоится 17 января 2012 года
в $16^{\underline{00}}$ часов на заседании
Диссертационного Совета Д.002.077.03 при
институте проблем передачи информации РАН им. А.А.Харкевича
по адресу:
127994, г.Москва, ГСП-4, Большой Каретный переулок, 19, стр.1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института проблем передачи информации РАН им. А.А.Харкевича

Автореферат разослан "_____ "______________ 2011 года

Ученый секретарь
Диссертационного Совета Д.002.077.03,
кандидат физико-математических наук

А.Н.Соболевский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящей работе изучаются квадратичные отображения с динамической и геометрической точек зрения. Квадратичное отображение из $\mathbb{R}P^n$ в $\mathbb{R}P^m$ или из $\mathbb{C}P^n$ в $\mathbb{C}P^m$ — это отображение, заданное в однородных координатах однородными квадратичными формами.

С динамической точки зрения мы будем рассматривать квадратичные рациональные отображения сферы Римана в себя, то есть ограничимся случаем $m = n = 1$. Изучение таких отображений было инициировано французскими математиками Фату и Жюлиа в первой половине 20-го века. Их результаты были основаны на аналитической технике Монтеля, разработанной незадолго до этого. Однако качественный прорыв в этой обрасти произошел в 1980-ых, когда появилась возможность компьютерной визуализации одномерных комплексных динамических систем. Интерес к этим системам возобновился благодаря методу Ньютона. Это метод приближенного решения алгебраических уравнений, который сходится очень быстро, если первое приближение выбрано достаточно удачно. Возник вопрос: как зависит работа метода Ньютона от выбора первого приближения. С целью исследования этого вопроса были получены первые компьютерные картинки динамической плоскости, изображающие множество Жюлиа и множество Фату.

В работах Дуади и Хаббарда были заложены основы современной одномерной комплексной динамики. При этом они (вполне обоснованно) ограничились рассмотрением лишь рациональных отображений степени два, а большинство результатов было получено даже для более конкретного семейства квадратных многочленов $f(z) = z^2 + c$. Даже про это семейство остаются важные нерешенные вопросы. Под влиянием Дуади и Хаббарда, многие замечательные математики стали заниматься одномерной комплексной динамикой, и принесли в нее методы топологии и квазиконформного анализа. Стоит упомянуть работы Терстона, Салливана, Милнора, Любича, Рис.

В настоящий момент динамика многочленов изучена намного лучше, чем динамика рациональных функций. Это связано в первую очередь с тем, что комбинаторные вопросы про многочлены оказываются гораздо проще. Комбинаторная техника паззлов Йоккоза свела многие динамические вопросы к вопросам анализа. К сожалению, подобная комбинаторная техника для случая рациональных функций пока не создана. Поэтому важной задачей представляется задача разработки общих методов построения топологических моделей для рациональных функций (топологичекие модели многочленов с достаточно простой динамикой могут быть получены при помощи ламинаций Терстона), а также идентификации различных динамически важных частей сферы Римана (в случае многочленов, эту задачу решают паззлы Йоккоза). Разработке таких методов посвящена часть настоящей диссертации. А именно, определена весьма общая хирургическая операция, позволяющая в некотором смысле отображать динамику сложных рациональных функций в динамику простых рациональных функций. Разобрано несколько конкретных примеров, в которых полученная техника позволяет как строить топологические модели, так и выделять динамически значимые части.

Вторая часть диссертации посвящена геометрии квадратичных отображений. При этом рассматриваются более высокие размерности. Эта часть имеет еще более давнюю историю. В фундаментальной работе Мебиуса (1827) были заложены основы проективной и конформной геометрий. При этом исследовались те преобразования, которые сохраняют ту или иную геометрическую структуру. Например, Мебиус ввел коллинеации (т.е. непрерывные отображения, переводящие прямые в прямые) и преобразования Мебиуса (т.е. непрерывные отображения, переводящие прямые в окружности). Другими словами, коллинеации сохраняют проективную структуру, а преобразования Мебиуса сохраняют сферическую структуру. Возникает вопрос о том, какие отображения “переводят” одну структуру в другую. Это интересно в связи с задачами геометризации и просто как непосредственное продолжение исследований Мебиуса. К задачам такого же рода приводили и практические вопросы, связанные, например, с номографией или архитектурой. Один способ конкретизировать задачу такой: описать все достаточно гладкие отображения, переводящие прямые в окружности.

Как выяснилось в работах автора, в высоких размерностях эта задача связана с отображениями Хопфа, представлениями алгебр Клиффорда, формулами Гурвица. Получены явные ответы в размерностях 2, 3 и 4 (ответ в размерности 4, полученный автором, сильно отличается от ответов в размерностях 2 и 3; в нем фигурируют кватернионные расслоения Хопфа). В больших размерностях, вопрос остается открытым. Его удалось частично свести к чисто алгебраической задаче описания квадратичных отображений, переводящих проективное пространство в квадрику. Однако эта алгебраическая задача очень сложна. Она содержит в качестве конкретизации известную задачу Гурвица 1898 года о произведениях сумм квадратов.

Интересна также более общая задача: описать достаточно гладкие отображения, переводящие прямые в коники. Здесь эта задача обсуждается только в размерности два. Описаны выпрямляемые пучки коник, проходящих через одну точку, а также все достаточно гладкие отображения, переводящие отрезки прямых в части коник из трехмерного линейного семейства.

Цель работы. Диссертация преследует следующие научные цели. В первой части, посвященной динамике рациональных функций на сфере Римана:

- изучение хирургических операций, преобразующих одни рациональные функции в топологические модели других рациональных функций;

- построение топологических моделей для рациональных функций;
- разработка методов описания грубой комбинаторной структуры рациональных функций.

Во второй части, посвященной преобразованиям, переводящим прямые в коники:

- классификация отображений, переводящих отрезки прямых в дуги окружностей;
- установление связей между задачами о классических геометрических структурах и задачами квадратичной алгебры (формулы Гурвица, представления алгебр Клиффорда, дробно-квадратичные отображения в квадрики);
- классификация отображений, переводящих отрезки прямых в части коник.

Методы исследования. В первой части широко используются топологические и аналитические методы. Ключевое соображение при доказательстве общей теоремы о существовании полусопряжения состоит в равномерной сходимости алгоритма Терстона. Алгоритм Терстона применяется в необычной ситуации, а именно, не к гомеоморфизму сферы, а к отображению из более сложного топологического пространства в сферу. При построении топологических моделей использована техника голоморфных движений, а также аналоги паззлов Йоккоза для некоторых (достаточно специальных) классов рациональных функций, предложенные Луо. Во второй части используются методы алгебраической геометрии и теории вполне интегрируемых систем. Например, классификация четырехмерных отображений, переводящих прямые в окружности, состоит из двух частей. Первая часть имеет дело с выпрямляемыми пучками окружностей и является по существу алгебраической. Вторая часть связана с явным интегрированием переопределенной системы дифференциальных уравнений с частными производными. Эта система оказывается вполне интегрируемой. Явное интегрирование производится по методу Картана, а именно, последовательными переходами к уравнениям интегрируемости.

Научная новизна. Диссертация содержит следующие новые результаты и методы

- Новая общая схема топологической хирургии для рациональных функций (переклейка). Эта хирургическая операция позволяет, с одной стороны, строить явные топологические модели для рациональных функций. С другой стороны, она оказывается полезной при изучении общих свойств негиперболических функций.

- Построены явные топологические модели для рациональных функций на границах компонент типа C в параметрических срезах $Per_k(0)$. В параметрическом срезе $Per_2(0)$ построены явные топологические модели для функций на границе гиперболической компоненты типа B (топологические модели для функций на границах компонент типа C в этом параметрическом срезе были известны).

- Получено новое обобщение классической теоремы Мебиуса-фон Штаудта: дана классификация отображений из открытого множества проективной плоскости в проективное трехмерное пространство, которые переводят отрезки прямых в дуги плоских кривых

- Дано описание всех достаточно гладких диффеоморфизмов между открытым подмножеством в $\mathbb{R}P^4$ и открытым подмножеством в S^4, которые переводят отрезки прямых в дуги окружностей. В размерностях 2 и 3 эта задача была решена раньше. Результат в размерности 4 неожиданно сильно отличается от соответствующих результатов в размерностях 2 и 3. А именно, в ответе фигурируют кватернионные расслоения Хопфа.

- Обнаружена связь между задачей описания отображений, переводящих отрезки прямых в дуги окружностей, и некоторыми давно стоящими (более 100 лет) задачами алгебры, например, задачей описания квадратичных отображений из проективных пространств в квадрики (в качестве специализации, эта задача включает задачу Гурвица 1898 года о произведениях сумм квадратов).
- Описаны локальные отображения проективной плоскости, переводящие отрезки прямых в части коник одной и той же линейной системы размерности три.

Научная значимость работы. Результаты диссертации будут полезны для построения топологических моделей рациональных функций. Кроме того, они могут служить основой построения комбинаторной техники, напоминающей технику паззлов Йоккоза из полиномиальной динамики. Соответствующая техника может в дальнейшем применяться к задачам жесткости. Полученные геометрические результаты получают развитие в работах по вполне-интегрируемым системам (В. Матвеев, С. Табачников) и в математических исследованиях архитектурных форм (Ф. Нилов, Х. Поттман, М. Скопенков, Л. Ши). Они могут быть полезны, например, для решения старой задачи Бляшке о тканях из окружностей и других задач классической геометрии.

Апробация работы. Часть настоящей работы была удостоена премии П. Делиня. Работа частично поддержана грантами РФФИ и Минобрнауки (Президентский грант для поддержки молодых кандидатов наук).

Результаты диссертации докладывались на семинаре отдела дифференциальный уравнений МИАН, московском семинаре Глобус, семинаре НМУ по пространствам модулей кривых, семинаре лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ ВШЭ, семинаре МГУ по динамическим системам, летней школе по динамическим системам, на международных конференциях

- Polynomial Matings 8.06.2011 - 11.06.2011 Франция, Тулуза
- Ahlfors-Bers Colloquium 2011, 24.03.2011 - 27.03.2011 США, Хьюстон
- Texas Ergodic Theory Workshop 22.03.2011 - 23.03.2011 США, Хьюстон
- Frontiers in Complex Dynamics 20.02.2011 - 25.02.2011 Канада, Банф
- Holomorphic dynamics around Thurston's theorem 27.09.2010 - 1.10.2010 Дания, Роскильде
- Advances in low dimensional dynamics 8.06.2009 - 13.06.2009 США, Stony Brook

а также на научных семинарах, конференциях и симпозиумах в университете Бостона (США), институте Анри Пуанкаре в Париже (Франция), исследовательской станции в Обервольфахе (Германия), университете Ливерпуля (Великобритания), университете Якобса в Бремене (Германия), университете Геттингена (Германия), университете Марбурга (Германия), математическом институте им. М. Планка в Бонне (Германия), университете Закатекаса (Мексика), университете Пенн Стейт

(США), университете Торонто (Канада), Филдсовском институте (Канада), университете Массачусетса в Амхерсте (США), университете Йейля (США), городском университете Нью Йорка (США).

Объем и структура диссертации. Общий объем диссертации составляет 230 страниц. К диссертации прилагаются два добавления. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы из 50 наименований.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приведен в конце автореферата.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Динамика. Мы будем рассматривать топологические динамические системы на двумерной сфере S^2, порожденные непрерывными отображениями $f : S^2 \to S^2$. Если такое отображение f фиксировано, про него можно думать как про некоторую геометрическую структуру на сфере. А именно, можно думать, что на сфере нарисованы стрелки, соединяющие x с $f(x)$ для всех точек $x \in S^2$. Конечно, форма стрелок не имеет никакого значения, единственная существенная информация — это то, какие пары точек соединяются этими стрелками. Мы рассматриваем топологические динамические системы с точностью до гомеоморфизма, то есть топологического сопряжения. Гомеоморфизм между двумя топологическими сферами со стрелками должен также переводить стрелки в стрелки.

Топологическая динамика не меняется при сопряжениях гомеоморфизмами. Таким образом, чтобы изменить топологическую динамику, необходима топологическая хирургия, включающая разрывные операции (такие, как разрезы). Самый простой способ сделать разрез на сфере — это порезать вдоль некоторой простой кривой. Однако, если на сфере нарисованы стрелки, изображающие динамическую систему f, то разрез сферы вдоль кривой создает некоторые проблемы. А именно, если мы режем через конец стрелки, то стрелка раздваивается. Это плохо, поскольку непрерывное отображение не может породить две стрелки, идущие из одной и той же точки в разные точки. Чтобы ликвидировать эту проблему, нужно сделать дополнительные разрезы, а именно, нужно провести разрезы через начала всех стрелок, концы которых оказались разрезанными. Иначе говоря, если мы разрезали сферу вдоль некоторой кривой, то нужно также разрезать сферу вдоль прообразов этой кривой. При этом опять возникают проблемы, поскольку мы опять будем резать через концы еще каких-нибудь стрелок. Таким образом, если мы сделали разрез вдоль простой кривой $Z \subset S^2$, то нужно также сделать разрез вдоль компонент прообраза $f^{-1}(Z)$, вдоль компонент второго прообраза $f^{-2}(Z)$, и т.д. Всего нужно будет сделать счетное число разрезов. После того, как все разрезы сделаны, получится некоторое топологическое пространство X. Мы позже определим это пространство более точно как обратный предел последовательности топологических пространств. Назовем пространство X *разрезанной сферой.*

На разрезанной сфере X уже корректно определены стрелки (все неприятности были разрешены). Таким образом, имеется корректно определенное непрерывное отображение $F : X \to X$. Заметим, что топологическая динамическая система $F : X \to X$ определяется однозначно отображением f и кривой Z, вдоль которой был сделан первый разрез (мы будем называть эту кривую первым разрезом). Мы также будем рассматривать более общую ситуацию, когда первый разрез Z представляет собой не одну простую кривую, а объединение нескольких простых кривых.

Допустим, мы хотим построить топологическую модель для рациональной функции $g : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, зная очень хорошо, как устроена топологическая динамика рациональной функции $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$. Один из способов это сделать — применить топологическую хирургию к отображению f, результатом которой будет топологическая модель для отображения g. Я разработал вариант такой топологической хирургии. Этот вариант называется *переклейка.* Переклейка начинается с разрезания сферы вдоль простой кривой и всех ее прообразов относительно отображения f. Полученная разрезанная сфера затем склеивается подругому (не так, как она была разрезана). Получается топологическое пространство, гомеоморфное сфере. На этом топологическом пространстве нарисованы стрелки, таким образом, мы имеем дело с топологической динамической системой на сфере. Во многих случаях, переклейка служит моделью рациональных функций. При помощи переклейки удалось получить топологические модели для однопараметрических семейств негиперболических рациональных функций. (Заметим, что топологические модели для однопараметрических семейств негиперболических квадратных многочленов до сих пор не получены — это очень сложная открытая задача).

Обсудим для простоты, что происходит при переклейке одной кривой (в динамической ситуации, недостаточно переклеить одну кривую; нужно переклеить счетное число кривых; но мы сейчас рассмотрим простейшую ситуацию, в которой никакой динамики нет). Допустим, мы хотим переклеить отрезок $[-1,1]$. Это можно сделать при помощи листа многозначного аналитического отображения

$$j(z) = \sqrt{z^2 - 1}.$$

На дополнении к отрезку $[-1,1]$ в сфере Римана, это многозначное аналитическое отображение распадается на две однозначные ветви. Одна ветвь имеет вид $z + o(z)$ при $z \to \infty$, а вторая ветвь имеет вид $-z + o(z)$ при $z \to \infty$. Выберем, например, первую из этих ветвей (которая касается тождественного отображения на бесконечности) и будем ее обозначать той же буквой j. Значение $j(z)$ имеет определенный предел при стремлении z к $z_0 \in [-1,1]$ сверху, а также определенный предел при стремлении z к z_0 снизу, но эти пределы не совпадают. С другой стороны, предел сверху в точке z_0 совпадает с пределом сверху в точке $1 - z_0$, и то же верно для пределов снизу. Таким образом, отображение j разрезает сферу Римана вдоль отрезка $[-1,1]$ и заклеивает образовавшийся край по-другому. Именно отображение j дает модель переклейки. Заметим, что вместо отрезка $[-1,1]$ мы могли бы взять любую другую простую кривую, соединяющую точки ± 1 и симметричную относительно начала координат.

Если мы переклеим одну кривую (например, при помощи отображения j), то из сферы снова получится сфера. Даже не просто топологическая сфера, а сфера с корректно определенной комплексной структурой, поскольку отображение j голоморфно. Но все комплексные сферы одинаковы. Так что мы переклейкой ничего не добьемся, если только на сфере нет еще дополнительной геометрической структуры. В качестве этой дополнительной геометрической структуры можно рассмотреть стрелки, порожденные динамикой некоторого отображения f. Тогда переклейка эту структуру меняет. Одновременно можно думать, что на сфере нарисовано множество Жюлиа отображения f. При переклейке это множество тоже трансформируется. Нам нужно сделать бесконечное число переклеек. Это относительно просто, если все кривые, котрые нужно переклеить, не пересекаются, и их диаметр стремится к нулю. В этом случае после переклейки получится топологическая сфера (это можно доказать при помощи теории Мура). На переклеенной сфере будет нарисовано некоторое множество, и будут расставлены стрелки. Мы опишем ситуации, в которых эти стрелки соответствуют топологической динамике рациональных функций, а нарисованные множества совпадают с множествами Жюлиа этих функций.

Топологическая хирургия (обобщающая переклейку) может быть использована не только для построения явных топологических моделей. Допустим, мы хотим сказать что-нибудь содержательное про динамическое поведение негиперболической рациональной функции $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$. Топологическая динамика отображения f может быть очень сложной, но мы хотим хотя бы как-то подойти к ее изучению. Один из способов это сделать состоит в следующем. Разрежем сферу вдоль некоторого множества Z (конечного объединения простых кривых) и всех его прообразов. Как и раньше, мы получим топологическую динамическую систему $F : X \to X$ на разрезанной сфере X. Мы будем говорить, что отображение $F : X \to X$ получено из отображения $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ разрезанием.

Мы сделали счетное число разрезов, но, на самом деле, с орбитами почти всех точек ничего не произошло. Поэтому следует думать, что динамика отображения $F : X \to X$ мало отличается от динамики отображения f. Впрочем, топология пространства X, конечно, очень сильно может отличаться от топологии сферы. Например, это пространство может иметь несчетное число компонент связности (как у канторовского множества). В очень общей ситуации, которая будет описана ниже, удается построить полусопряжение между топологической динамической системой $F : X \to X$ и некоторой *гиперболической критически конечной* (то есть очень хорошей!) функцией R. Таким образом, можно изучать динамику отображения $F : X \to X$ (а значит, и динамику отображения $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$) при помощи полусопряжения с хорошей гиперболической рациональной функцией. Более того, эту хорошую рациональную функцию можно выбрать очень многими способами (как правило, есть бесконечное число способов).

Сформулируем это утверждение более точно. Нам понадобится некоторое отношение на множестве рациональных функций, определение которого напоминает определение комбинаторной эквивалентности, но которое на самом деле гораздо слабее (в отличие от комбинаторной эквивалентности, этим отношением будут связаны очень многие пары рациональных функций). Пусть f и R — рациональные функции, причем функция R является критически конечной. Скажем, что функция R *изображает* функцию f, если f топологически сопряжено разветвленному накрытию, гомотопному отображению R, причем в ходе гомотопии множество $R(P_R)$ остается неподвижным (напомним, что P_R обозначает посткритическое множество отображения R). Разница с определением эквивалентности по Терстону состоит только в том, что множество P_R заменилось множеством $R(P_R)$. Но смысл определения при этом поменялся совершенно радикально! Если R изображает функцию f, то эти две функции не обязаны иметь ту же самую структуру критических орбит. На самом деле, критические орбиты отображения f

могут вести себя сколь угодно сложно. Про R мы требуем, чтобы эта функция была гиперболической. В частности, у нее есть хотя бы один суперпритягивающий цикл. Это означает, что у f тоже должен быть хотя бы один суперпритягивающий цикл, более того, структура суперпритягивающих циклов отображдения f должна быть такой же, как и структура суперпритягивающих циклов отображения R. Однако почти ничего больше не требуется. Например, кроме периодических критических точек, у f могут быть сотни других критических точек, чьи орбиты могут вести себя произвольно плохо. Если зафиксировать функцию f, то, как правило, имеется очень большая свобода выбора функции R.

Теорема 1 *Пусть $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ — рациональная функция, $R : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ — критически конечная гиперболическая рациональная функция, изображающая функцию f. Тогда существует такая разрезанная сфера X и соответствующее отображение $F : X \to X$, получающееся из f разрезанием, такие, что топологическая динамическая система $F : X \to X$ полусопряжена динамической системе $R : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$.*

Напомним, что пространство X и отображение $F : X \to X$ полностью определяются выбором начального множества Z, вдоль которого сфера разрезается на первом шаге (дальнейшие шаги определены однозначно и сводятся к разрезам вдоль прообразов множества Z). В формулировке теоремы множество Z тоже связано квантором существования. Но для конкретных приложений, конечно, очень важно, каким именно образом выбирается это множество. Прежде, чем переходить к конкретным примерам, отметим только, что множество Z можно выбрать очень многими способами. По существу, оно определено только с точностью до некоторой гомотопии. В частности, можно считать, что оно состоит из сколь угодно гладких кривых, или даже вещественно полуалгебраических кривых.

Теорему 1 можно сделать более явной для определенных комплексных одномерных пространств параметров квадратных рациональных функций. Динамика всего отображения во многом определяется поведением орбит критических точек. Рациональная функция степени два имеет две критические точки. Поэтому, если зафиксировать простое динамическое поведение одной из них, то останется лишь одна “свободная” критическая точка. Обычно требуют, чтобы одна из критических точек была периодической с фиксированным периодом k. Пространство таких квадратичных рациональных функций обозначается через $Per_k(0)$. Более точно, пространство $Per_k(0)$ определяется как пространство классов сопряженности рациональных функций R степени два с отмеченными критическими точками c_1 и c_2, таких, что $R^{\circ k}(c_1) = c_1$ (причем ни при каком меньшем значении k это равенство не выполнено). Под классами сопряженности мы понимаем орбиты группы голоморфных автоморфизмов сферы Римана, действующих на рациональных функциях сопряжениями.

Пространства параметров $Per_k(0)$ представляют собой одномерные срезы двумерного пространства параметров всех рациональных функций (с отмеченными критическими точками и рассматриваемых, конечно, с точностью до сопряжений автоморфизмами сферы). Например, при $k = 1$, получаем пространство квадратных многочленов $z^2 + c$.

Классы гиперболических отображений в $Per_k(0)$ образуют открытое множество, компоненты которого называются гиперболическими компонентами. По определению, гиперболическая рациональная функция степени 2 с отмеченными критическими точками c_1, c_2, представляющая элемент пространства $Per_k(0)$, *имеет тип C*, если точка c_2 рано или поздно отображается в цикл непосредственных бассейнов притяжения орбиты точки c_1, но не лежит в этом цикле. Топологические модели для всех отображений, соответствующих граничным точкам гиперболических компонент типа C, могут быть построены при помощи переклейки.

В случае $k = 2$, имеется единственная гиперболическая компонента типа В. У отображений, соответствующих внутренним точкам этой компоненты, обе критические точки c_1 и c_2 лежат в одном и том же 2-цикле непосредственных суперпритягивающих областей. Для отображений, соответствующих граничным точкам этой компоненты, построены явные топологические модели в терминах ламинаций и спариваний.

Геометрия. В 1820х годах, Август Мебиус доказал такую теорему. Пусть $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ — непрерывное взаимно-однозначное отображение, переводящее все прямые в прямые. Тогда f является проективным (то есть дробно-линейным) преобразованием. Немного позднее, фон Штаудт обнаружил, что условие непрерывности можно убрать. Имеется локальный вариант этой теоремы про непрерывные преобразования из одной открытой области в другую, переводящие отрезки прямых в отрезки прямых. Кроме того, Мебиус доказал, что если непрерывное взаимно-однозначное отображение $f : S^2 \to S^2$ переводит окружности в окружности, то f является преобразованием Мебиуса, то есть принадлежит группе, порожденной инверсиями относительно окружностей (а также локальный вариант этого утверждения). Обе теоремы Мебиуса непосредственно обобщаются на любые размерности. Теоремы Мебиуса описывают автоморфизмы классических геометрических структур: проективной структуры и сферической структуры (структуры Мебиуса).

При изучении геометризации многообразий, естественным образом возникли задачи описания морфизмов между различными геометрическими структурами. Например, морфизмом между проективной и сферической структурами естественно называть отображение, переводящее прямые в окружности. Более точно: пусть $f : U \to V$ — достаточное число раз дифференцируемое отображение из открытого подмножества U

проективного пространства $\mathbb{R}^n$ в открытое подмножество V сферы S^n. Мы будем говорить, что отображение f переводит прямые в окружности, если для всякой прямой $L \subset \mathbb{R}P^n$, множество $f(U \cap L)$ принадлежит некоторой окружности в S^n (напомним, что окружностями в S^n называются пересечения S^n с двумерными плоскостями). Возникает задача: как описать все достаточно гладкие отображения из открытого подмножества проективного пространтсва в открытое подмножество сферы той же размерности, переводящие прямые в окружности?

Хотя главным образом интерес (автора) к этой задаче объясняется чисто математическими причинами, впервые эта задача возникла из практики. В начале–середине двадцатого века для быстрых вычислений с функциями многих переменных активно использовались номограммы. Существует два важных класса номограмм. Так называемые номограммы из выровненных точек использовали для вычислений линейку, а так называемые циркулярные номограммы использовали для вычислений циркуль. На практике удобней использовать циркулярные номограммы, хотя теоретически проще рассматривать номограммы из выровненных точек. Таким образом, возникает задача: описать все отображения, переводящие номограммы из выровненных точек в циркулярные номограммы. Другими словами, описать все отображения, переводящие прямые в окружности. В этом виде задача была впервые поставлена известным советским специалистом в области номографии Г.С. Хованским. Задача была первоначально сформулирована только в размерности 2: описать все взаимно однозначные достаточно гладкие отображения из открытого подмножества $U \subset \mathbb{R}^2$ в открытое подмножество $V \subset \mathbb{R}^2$, переводящие прямые в окружности. В этом виде задача была полностью решена А.Г. Хованским: с точностью до проективного преобразования в прообразе и преобразования Мебиуса в образе, таких отображений только три, и они соответствуют классическим моделям классических геометрий — евклидовой геометрии, сферической (эллиптической) геометрии и гиперболической геометрии (геометрии Лобачевского). Ф. Изади обобщил этот результат на размерность три.

Выяснилось, что утверждение нарушается уже в размерности 4. Контрпримеры связаны с кватернионными расслоениями Хопфа.

Теорема 2 *Пусть $f : U \to V$ — достаточно гладкий диффеоморфизм между связным открытым подмножеством в $\mathbb{R}P^4$ и открытым подмножеством в S^4, переводящий прямые в окружности. Тогда, либо f имеет вид $f = M \circ \phi \circ P$, где M — преобразование Мебиуса, P — проективное преобразование, а ϕ — одно из трех отображений ϕ_{Euc}, ϕ_{Ell} и ϕ_{Hyp}, соответствующих классическим геометриям, либо f совпадает (на множестве U) с композицией проективного вложения $L : \mathbb{R}P^4 \to \mathbb{R}P^7$ и (левого или правого) кватернионного расслоения Хопфа $H : \mathbb{R}P^7 \to S^4$.*

Заметим, что даже если рассматривать отображения $f : U \to V$, переводящие прямые в окружности, с точностью до проективных преобразований в прообразе и преобразований Мебиуса в образе, то, помимо трех отображений, соотвествующих классическим геометриям, мы получаем два двенадцатипараметрических семейства отображений, приходящих из кватернионных расслоений Хопфа.

Задача об описании отображений, переводящих прямые в окружности, в высоких размерностях связана с некоторыми вопросами алгебры и алгебраической геометрии, которые очень сложны, несмотря на исключительно простые формулировки. Пример такой задачи: описать все квадратичные рациональные отображения из $\mathbb{R}P^m$ в S^n (или даже все квадратичные отображения из $\mathbb{C}P^m$ в n-мерную комплексную квадрику).

Теорема 3 *Пусть $f : U \to V$ — достаточное число раз дифференцируемое отображение из открытого подмножества U проективного* *пространства* $\mathbb{R}P^m$ *в открытое подмножество* V *сферы* S^n*. Предположим, что для некоторой точки* $x \in U$*, ранг первого дифференциала* $d_x f$ *не меньше двух, и образ ростка любой прямой, проходящей через* x*, является ростком окружности в точке* $f(x)$*. Тогда существует квадратичное рациональное отображение* $Q_x : \mathbb{R}P^m \dashrightarrow S^n$*, такое, что для каждой прямой* $l \ni x$*, образ ростка прямой* l *в точке* x *при отображении* f *совпадает с образом этого ростка при отображении* Q_x *(то есть образы при* f *и при* Q_x *являются ростками одной и той же окружности).*

В диссертации также обсуждаются отображения, переводящие прямые в коники. Получено описание выпрямляемых пучков коник, имеющих общую точку, а также всех достаточно гладких отображений, переводящих прямые в коники линейных систем размерности 3.

Список литературы

[1] В.А. Тиморин, *Смешанные билинейные соотношения Ходжа–Римана в линейном контексте*, Функциональный анализ и его приложения, **32** (1998), Н. 4, 63–68

[2] В.А. Тиморин *Аналог соотношений Ходжа–Римана для простых выпуклых многогранников*, Успехи мат. наук, т. **54**, вып. 2 (1999), с. 113–162

[3] В.А. Тиморин *О многогранниках, простых в ребрах*, Функц. анал. и прилож., т. **35**, вып. 3 (2001), с. 36–37

[4] V. Timorin, *Rectification of circles and quaternions*, Michigan Mathematical Journal, **51** (2003), 153–167

[5] V. Timorin, *Kähler metrics whose geodesics are circles*, Proceedings of the Conference "Fundamental Mathematics Today", Ed. S.K. Lando and O.K. Sheinman, pp. 284–293

[6] V. Timorin, *Окружности и алгебры Клиффорда*, Функциональный анализ и его приложения, **38** (2004), H. 1, 56–64,

[7] V. Timorin, *Circles and quadratic maps between spheres*, Geometriae Dedicata **115** (2005), pp. 19–32,

[8] В.А. Тиморин, *Диффеоморфизмы, переводящие прямые в окружности, и кватернионные расслоения Хопфа*, Функциональный анализ и его приложения, **4** (2006), H. 2, 33–43

[9] V. Timorin, *Rectifiable pencils of conics*, Moscow Mathematical Journal **7** (2007), no. 3, 561–570

[10] F. Aicardi, V. Timorin, *On binary quadratic forms with semigroup property*, Proceedings of Steklov Institute **258** (2007), the volume dedicated to the 70th birthday of V. Arnold

[11] V. Timorin, "External boundary of M_2", Fields Institute Communications Volume **53**: "Holomorphic Dynamics and Renormalization A Volume in Honour of John Milnor's 75th Birthday"

[12] V. Timorin, "Topological regluing of rational functions", Inventiones Math., **179** (2009), Issue 3, 461–506