

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ им. Л. Д. ЛАНДАУ

На правах рукописи

БУРМИСТРОВ Игорь Сергеевич

УДК 538.915, 538.955

**Взаимодействующие двумерные электроны в случайном
потенциале на высоких уровнях Ландау**

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

кандидат физико-математических наук

М. А. Баранов

доктор физико-математических наук

М. В. Фейгельман

Москва — 2004

Оглавление

Введение	6
1 Неупорядоченная двумерная электронная жидкость в слабом магнитном поле	11
1.1 Введение	11
1.2 Вывод эффективного действия	13
1.2.1 Введение	13
1.2.2 Действие	16
1.2.3 Плазмонное поле и усреднение по случайному потенциалу	18
1.2.4 Выделение N -ого уровня Ландау	19
1.2.5 Перевальное решение для поля Q в отсутствие плазмонного поля $\lambda_{\nu_n}^\alpha(\mathbf{r})$	20
1.2.6 Сдвиг перевального решения плазмонным полем $\lambda_{\nu_n}^\alpha(\mathbf{r})$.	22
1.2.7 Эффективное действие	25
1.3 Экранированное взаимодействие, химический и термодинамический потенциалы	28
1.3.1 Экранированное взаимодействие	28
1.3.2 Химический и термодинамический потенциалы	31
1.3.3 Ограничение на ширину уровня Ландау	32
1.4 Эффективный g -фактор, спектр и время жизни спиновых волн	32
1.4.1 Эффективный g -фактор	33
1.4.2 Спектр и время жизни спиновых волн	34

1.5	Туннелирование на высокий уровень Ландау, заполненный на половину	36
1.6	Заключение	41
1.7	Приложение: Поправки к термодинамическому и химическому потенциалу	41
1.8	Приложение: Вычисление поляризационного оператора	43
1.9	Приложение: Вычисление поправок к термодинамическому и химическому потенциалу	44
1.9.1	Термодинамический потенциал	44
1.9.2	Химический потенциал	45
2	Фазовая диаграмма двумерных неупорядоченных электронов в слабом магнитном поле	47
2.1	Введение	47
2.2	Свободная энергия состояния волны зарядовой плотности	50
2.2.1	Введение	50
2.2.2	Приближение Хартри-Фока	52
2.2.3	Усреднение по случайному потенциалу	53
2.2.4	Термодинамический потенциал	54
2.2.5	Свободная энергия	58
2.2.6	Свободная энергия состояний волны зарядовой плотности	59
2.3	Фазовая диаграмма в приближении среднего поля	61
2.3.1	Линия неустойчивости (спинодаль)	61
2.3.2	Заполненный на половину уровень Ландау ($\nu_N = 1/2$)	63
2.3.3	Фазовая диаграмма при нулевой температуре	65
2.4	Слабая кристаллизация	68
2.5	Обсуждение полученных результатов	73
2.5.1	Сравнение с экспериментом	73
2.5.2	Сравнение с численными расчетами	75

2.6	Заключение	76
2.7	Приложение: Вектор неустойчивости	76
3	Анизотропная проводимость двумерных электронов на высоком уровне Ландау, заполненном на половину	78
3.1	Введение	78
3.2	Трехуровневая модель	80
3.2.1	Введение	80
3.2.2	Эффективное действие для трехуровневой модели	81
3.2.3	Приближение Хартри-Фока	82
3.2.4	Усреднение по случайному потенциалу	84
3.2.5	Термодинамический потенциал. Вклад второго порядка	86
3.2.6	Трехуровневая модель	89
3.3	Проводимость состояния однонаправленной волны зарядовой плотности при $T_c - T \ll T_c$	90
3.3.1	Тензор проводимости σ_{ab}	90
3.3.2	Анизотропная часть тензора проводимости $\sigma_{ab}^{(\text{anis})}$	94
3.3.3	Изотропная часть тензора проводимости $\sigma_{ab}^{(\text{isot})}$	95
3.4	Флуктуационная проводимость	97
3.4.1	Флуктуации параметра порядка с учетом анизотропии	97
3.4.2	Флуктуационные поправки к анизотропной части тензора проводимости $\sigma_{ab}^{(\text{anis})}$	99
3.4.3	Флуктуационные поправки к изотропной части тензора проводимости $\sigma_{ab}^{(\text{isot})}$	100
3.4.4	Пределы применимости результатов (3.70), (3.75) и (3.76)	102
3.5	Обсуждение полученных результатов	102
3.6	Заключение	106
3.7	Приложение: Вычисление характерной температуры T_1	107
3.8	Приложение: Вычисление величин $I_{p_1 p_2 p_3 p_4}(\mathbf{Q}_0)$	108

Заключение	110
Публикации автора по теме диссертации	114
Литература	115

Введение

Актуальность темы.

Двумерные электронные структуры остаются в течение долгого времени объектом интенсивных исследований как экспериментальных, так и теоретических. Устойчивый интерес к двумерным электронным структурам обуславливается в значительной мере благодаря их разнообразному и эффективному применению в микроэлектронике [1]. К концу семидесятых годов казалось, что все явления в двумерных электронных структурах хорошо изучены с экспериментальной точки зрения и поняты теоретически [2]. Однако вскоре был открыт целочисленный квантовый эффект Холла [3], за который в 1985 году К. фон Клитцингу была присуждена Нобелевская премия по физике [5]. Позже был измерен дробный квантовый эффект Холла [4], за который Р. Лафлин, Х. Стормер и Д. Цуи получили в 1998 году Нобелевскую премию по физике [5, 7, 8]. Открытие этих новых фундаментальных явлений – квантового эффекта Холла, целочисленного и дробного, – привело к интенсивному исследованию свойств двумерных электронных структур в сильных магнитных полях [9, 10].

В 1999 году было открыто явление сильной анизотропии магнитосопротивления в высококачественных двумерных электронных структурах при достаточно низких температурах и в относительно слабом магнитном поле [11, 12]. Оно состоит в том, что сопротивления R_{xx} и R_{yy} , измеренные при факторах заполнения $\nu = \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}$ и температурах ниже 100 mK , могут отличаться друг от друга на

два порядка по величине. Позже было найдено, что направления осей меньшего и большего сопротивлений связаны с кристаллическими осями в гетероструктуре, причем приложенное параллельно двумерному слою магнитное поле может взаимно поменять оси меньшего и большего сопротивлений [13, 14, 15, 16]. Активное экспериментальное исследование транспортных свойств в высококачественных двумерных электронных структурах при достаточно низких температурах и в относительно слабом магнитном поле продолжается до сих пор [17]. Обнаружение в 2002 году явления обращения в нуль магнитосопротивления в высококачественных двумерных электронных структурах, облучаемых миллиметровым излучением, в слабом магнитном поле [18, 19] показывает, что до сих пор двумерные электронные структуры, особенно в магнитном поле, остаются актуальным объектом для изучения.

Явления целочисленного и дробного квантового эффекта Холла – это проявление наличия как беспорядка (случайный потенциал), так и взаимодействия электронов между собой. Долгое время влиянием электрон-электронного взаимодействия на свойства двумерных электронов в слабом магнитном поле пренебрегалось. Создание последовательной теории, учитывающей наличие электрон-электронного взаимодействия, для случая слабого магнитного поля было начато в работах [20, 21, 22, 23], которые однако рассматривали двумерные электроны без случайного потенциала. Открытие явления сильной анизотропии магнитосопротивления двумерных электронов на высоких уровнях Ландау привело к пониманию важности электрон-электронного взаимодействия в этой ситуации. При этом только в нескольких работах были сделаны попытки учета наличия случайного потенциала [17]. Однако последовательная теория, описывающая систему двумерных электронов на высоких уровнях Ландау, которая бы учитывала как электрон-электронное взаимодействие, так и наличие беспорядка не была

построена.

Целью работы являлось:

1. Создание эффективной теории для описания низкоэнергетической динамики взаимодействующих двумерных электронов в случайном потенциале и в *слабом* магнитном поле, когда заполнено много уровней Ландау. В частности, вычисление эффективного взаимодействия между электронами на последнем из заполненных уровней Ландау.
2. Исследование влияния беспорядка на фазовую диаграмму взаимодействующих двумерных электронов, находящихся в слабом магнитном поле.
3. Вычисление тензора проводимости взаимодействующих двумерных электронов на последнем из заполненных уровней Ландау при половинном заполнении ниже температуры перехода в состояние однонаправленной волны зарядовой плотности.

Научная новизна работы заключается в следующих оригинальных результатах, которые выносятся на защиту:

1. Построена теория, позволяющая описывать динамику взаимодействующих двумерных электронов, находящихся в случайном потенциале и в слабом магнитном поле, когда заполнено много уровней Ландау, через эффективное действие только для электронов на последнем из заполненных уровней Ландау. В рамках этой теории вычислены g -фактор, спектр и величина затухания спиновых возбуждений, а также исследована туннельная аномалия.
2. Вычислено разложение свободной энергии взаимодействующих двумерных электронов, находящихся в слабом магнитном поле и

в случайном потенциале, по параметру порядка состояния волны зарядовой плотности. Найдена фазовая диаграмма системы. Показано, что наличие случайного потенциала существенно ограничивает область существования состояний волны зарядовой плотности.

3. Показано, что существование однонаправленной волны зарядовой плотности на высоком уровне Ландау, заполненном на половину, приводит к анизотропии тензора проводимости. В рамках разложения по параметру порядка найдено, что анизотропная часть тензора проводимости появляется сразу при $T = T_c$ и пропорциональна отклонению температуры от критической. Учет флуктуаций параметра порядка приводит к размытию этого резкого перехода, т.е. тензор проводимости становится анизотропным еще при температурах выше T_c .

Структура диссертации такова:

В главе 1 строится теория для описания взаимодействующих двумерных электронов, находящихся в случайном потенциале и в слабом магнитном поле, в терминах эффективной теории для электронов на последнем из заполненных уровней Ландау, но с перенормированным взаимодействием и химическим потенциалом. Вычисляются поправки к g -фактору и спектру спиновых возбуждений из-за уширения уровней Ландау случайным потенциалом. Показывается, что рассеяние на примесях приводит к появлению конечного времени жизни спиновых возбуждений. Также обсуждается туннельная аномалия.

В главе 2 предложен метод аналитического вычисления разложения свободной энергии взаимодействующих двумерных электронов в случайном потенциале и в слабом магнитном поле по параметру порядка состояния волны зарядовой плотности. Выписано разложение Ландау до четвертого порядка, с помощью которого исследована фазовая диаграмма системы.

Показывается, что если ширина уровня Ландау становится больше определенного предельного значения, которое тем не менее гораздо меньше расстояния между уровнями, то состояние волны зарядовой плотности образоваться не может даже при нулевой температуре.

В главе 3 вычисляется тензор проводимости взаимодействующих двумерных электронов на высоком уровне Ландау, заполненном на половину. Показывается, что ниже температуры фазового перехода второго рода в состояние однонаправленной волны зарядовой плотности тензор проводимости становится анизотропным, причем вблизи линии фазового перехода анизотропная часть оказывается пропорциональной отклонению температуры от критической. Также изучаются флуктуационные поправки к проводимости вблизи температуры фазового перехода.

Глава 1

Неупорядоченная двумерная электронная жидкость в слабом магнитном поле

1.1 Введение

При исследовании системы двумерных электронов в случайном потенциале в присутствии магнитного поля H наличие электрон-электронного взаимодействия долгое время не принималось во внимание [2]. Однако выяснилось, что учет электрон-электронного взаимодействия необходим для объяснения широкого класса явлений в двумерных неупорядоченных системах как без магнитного поля так и в магнитном поле [24, 25]. В присутствии сильного магнитного поля (режим квантового эффекта Холла) последовательная теория, описывающая двумерные электроны в случайном потенциале с учетом взаимодействия между ними, строится, но еще далека от завершения [26, 27, 28, 29].

Первоначально изучение системы в промежуточном магнитном поле, когда заполнены несколько уровней Ландау, производилось в предположении, что циклотронная частота $\omega_H = eH/m \gg e^2/(\epsilon l_H)$, где e обозначает заряд электрона, m его эффективную массу, ϵ диэлектрическую проницаемость

гетероструктуры, а $l_H = 1/\sqrt{m\omega_H}$ магнитную длину¹. Это позволяло не учитывать влияния других уровней Ландау на данный [30, 31, 32]. В дальнейшем взаимодействие электронов на одном уровне Ландау с электронами на других уровнях Ландау было учтено с помощью теории возмущений по параметру $e^2/(\epsilon l_H \omega_H)$ [33, 34]. В действительности, в слабом магнитном поле характерная кулоновская энергия $e^2/(\epsilon l_H)$ превосходит циклотронную частоту ω_H . В работе [35] был рассмотрен случай промежуточных магнитных полей, когда фактор заполнения $\nu > 1$, и в приближении случайных фаз [36] численно были найдены эффективные масса и g -фактор.

Значительный прогресс в описании взаимодействующих двумерных электронов в *слабом* магнитном поле (фактор заполнения $\nu \gg 1$) был достигнут Алейнером и Глазманом, которые, используя разложение по малому параметру $\nu^{-1} \ll 1$, вывели эффективную теорию для низкоэнергетических возбуждений на последнем из заполненных уровне Ландау [20]. Этот подход позволяет строить описание системы, рассматривая *только* электроны на последнем из заполненных уровней Ландау, но с перенормированными взаимодействием и химическим потенциалом. Однако, в работе [20] не учитывалось наличие случайного потенциала, который кроме влияния на динамику электронов на последнем из заполненных уровне Ландау меняет эффективные взаимодействие и химический потенциал.

В этой главе мы выведем эффективную теорию для низкоэнергетических возбуждений на последнем из заполненных уровней Ландау с учетом наличия в двумерной системе случайного потенциала (раздел 1.2). В разделе 1.4 с помощью построенной эффективной теории мы изучим влияние примесей на обменное усиление g -фактора, а также на спектр и время жизни спиновых волн. Туннелирование электрона на высокий уровень Ландау, заполненный

¹Заметим, что используется система единиц, в которой $\hbar = 1$, $c = 1$ и $k_B = 1$.

на половину, будет рассмотрено в разделе 1.5.

1.2 Вывод эффективного действия

1.2.1 Введение

Рассмотрим систему двумерных взаимодействующих электронов в случайном потенциале, помещенную в перпендикулярное магнитное поле H . Будем предполагать, что магнитное поле *слабое*, т.е электроны занимают

$$N = [\nu/2] \gg 1 \quad (1.1)$$

уровней Ландау, при этом последний из них заполнен частично².

В отсутствие электрон-электронного взаимодействия примеси, расположенные в объеме около слоя двумерных электронов, представляют единственный механизм для уширения уровней Ландау. В эксперименте примеси могут находиться довольно далеко от слоя двумерных электронов [2, 9]. В такой ситуации двумерная электронная система находится в трехмерном случайном потенциале $V_{\text{dis}}^{(3D)}(\mathbf{r}, z)$ так, что электрон, локализованный в гетероструктуре, знает о примесях, расположенных на расстояниях много больше, чем толщина z_0 двумерного электронного газа. Как известно [37, 38], наличие случайного потенциала, создаваемого примесями, приводит к полному снятию вырождения уровня Ландау, если число примесей N_{imp} превышает число состояний на уровне Ландау

$$n_L S < N_{\text{imp}}. \quad (1.2)$$

Здесь $n_L = 1/2\pi l_H^2$, а S – площадь двумерного электронного слоя. Однако, если примесей так много, что выполняется условие

$$N_{\text{imp}} \frac{z_0}{D} \gg n_L S, \quad (1.3)$$

²Напомним, что $[x]$ означает целую часть x .

где D обозначает толщину гетероструктуры в направлении перпендикулярном двумерному слою (ось z), задача может быть сведена к эффективному случайному потенциалу $V_{\text{dis}}(\mathbf{r})$, зависящему только от двумерного вектора $\mathbf{r}$ [39, 40]. При этом эффективная концентрация примесей равна $n_{\text{imp}} \simeq N_{\text{imp}} z_0 / SD$. Везде ниже будем предполагать, что условие (1.3) выполняется, и рассматривать случайный потенциал как “двумерный”. При этом, так как примесей много, то можно считать, что случайный потенциал имеет гауссово распределение.

Важной характеристикой случайного потенциала является длина корреляции d . В слабом магнитном поле, когда число занятых уровней Ландау $N \gg 1$, естественно считать, что магнитная длина $l_H \propto \sqrt{N}$ много больше длины корреляции случайного потенциала, т.е.

$$d \ll l_H. \quad (1.4)$$

Выполнение условий (1.1), (1.3) и (1.4) позволяет рассматривать случайный потенциал в рамках самосогласованного борновского приближения³ [42, 43].

Для простоты ниже будем рассматривать предельный случай неравенства (1.4), когда $d \rightarrow 0$, т.е. дельта-коррелированный случайный потенциал

$$\langle V_{\text{dis}}(\mathbf{r}) V_{\text{dis}}(\mathbf{r}') \rangle = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.5)$$

где g связано с длиной рассеяния на примеси a [44]. Как известно [41], в самосогласованном борновском приближении полуширина уровня Ландау $1/(2\tau)$ равна

$$\frac{1}{2\tau} = \sqrt{g n_L}. \quad (1.6)$$

В дальнейшем будем рассматривать случай *слабого* беспорядка, когда полуширина уровня Ландау много меньше расстояния между ними,

$$\frac{1}{2\tau} \ll \omega_H. \quad (1.7)$$

³Укажем, что впервые оно было использовано для задачи о неупорядоченных электронах в магнитном поле в работе [41].

Заметим, что условие (1.3) накладывает на величину ширины уровня Ландау ограничение снизу

$$\frac{|a|}{z_0} \omega_H \ll \frac{1}{2\tau}, \quad (1.8)$$

которое совместно с условием (1.7) в силу $z_0 \gg |a|$.

Безразмерный параметр, характеризующий силу кулоновского взаимодействия между электронами, в отсутствие магнитного поля имеет вид

$$r_s = \frac{\sqrt{2}e^2}{\varepsilon v_F}, \quad (1.9)$$

где v_F обозначает скорость Ферми. Как это будет видно из дальнейшего, в присутствии магнитного поля удобно определить r_s как

$$r_s = \frac{\sqrt{2}e^2}{\varepsilon R_c \omega_H}, \quad (1.10)$$

где $R_c = l_H \sqrt{\nu}$ обозначает циклотронный радиус. Будем предполагать, что электрон-электронное взаимодействие относительно слабо, т.е.

$$r_s \ll 1. \quad (1.11)$$

Это условие позволяет работать в приближении случайных фаз [36]. Стоит отметить, что в обычных гетероструктурах параметр $r_s \sim 1$, однако известно, что расчеты для случая $r_s \ll 1$ дают хорошую оценку и для $r_s \sim 1$. Также будем считать, что число занятых уровней Ландау достаточно велико, а именно, выполняется условие,

$$Nr_s \gg 1. \quad (1.12)$$

Это условие эквивалентно тому, что циклотронный радиус R_c много больше боровского радиуса $a_B = \varepsilon/mc^2$, т.е. $R_c \gg a_B$.

Как будет показано ниже (см. раздел 1.3.3), наличие электрон-электронного взаимодействия приводит к дополнительному ограничению снизу для ширины уровня Ландау

$$\frac{\omega_H}{N} \ln \sqrt{2} r_s N \ll \frac{1}{2\tau}, \quad (1.13)$$

которое не противоречит условию (1.7), если

$$N \gg \ln \sqrt{2} r_s N. \quad (1.14)$$

1.2.2 Действие

Рассматриваемая система имеет следующую статистическую сумму, записанную через функциональный интеграл,

$$Z = \int \mathcal{D}[\bar{\psi}, \psi] \int \mathcal{D}[V_{\text{dis}}] \mathcal{P}[V_{\text{dis}}(\mathbf{r})] \exp \mathcal{S}[\bar{\psi}, \psi, V_{\text{dis}}] \quad (1.15)$$

с действием

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \sum_{\alpha=1}^{N_r} \int_0^{1/T} d\tau \int d\mathbf{r} & \left[\overline{\psi^{\alpha,\sigma}}(\mathbf{r}, \tau) \left(-\partial_\tau + \mu - \mathcal{H}_0 - V_{\text{dis}}(\mathbf{r}) \right) \psi^{\alpha,\sigma}(\mathbf{r}, \tau) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' \overline{\psi^{\alpha,\sigma}}(\mathbf{r}, \tau) \psi^{\alpha,\sigma}(\mathbf{r}, \tau) U_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \overline{\psi^{\alpha,\sigma'}}(\mathbf{r}', \tau) \psi^{\alpha,\sigma'}(\mathbf{r}', \tau) \right]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь $\psi^{\alpha,\sigma}$ и $\overline{\psi^{\alpha,\sigma}}$ грассмановы переменные, определенные на интервале $\tau \in [0, 1/T]$ в мнимом времени с антипериодическими граничными условиями $\psi^{\alpha,\sigma}(\mathbf{r}, 1/T) = -\psi^{\alpha,\sigma}(\mathbf{r}, 0)$. Символ μ обозначает химический потенциал системы, а $\sigma, \sigma' = \pm 1$ – спиновые индексы. Гамильтониан

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m} (-i\nabla - e\mathbf{A})^2 \quad (1.17)$$

описывает электрон в перпендикулярном магнитном поле $H = \epsilon_{ab} \partial_a A_b$.

Случайный потенциал $V_{\text{dis}}(\mathbf{r})$ предполагается дельта-коррелированным, что соответствует следующей функции распределения

$$\mathcal{P}[V_{\text{dis}}(\mathbf{r})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \exp \left(-\frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} V_{\text{dis}}^2(\mathbf{r}) \right), \quad (1.18)$$

где величина g связана с временем свободного пробега τ_0 и с термодинамической плотностью состояний ρ в отсутствие магнитного поля как

$$g = \frac{1}{2\pi \rho \tau_0}. \quad (1.19)$$

Для вычисления среднего $\langle \ln Z \rangle$ по случайному потенциалу $V_{\text{dis}}(\mathbf{r})$ для систем с взаимодействием существует всего два метода: техника Келдыша [45, 46, 47] и метод реплик [48, 25]. В данном случае удобно использовать метод реплик, в котором вычисляется среднее $\langle Z^{N_r} \rangle$ для произвольного натурального N_r , а затем используется соотношение

$$\langle \ln Z \rangle = \lim_{N_r \rightarrow 0} \frac{\langle Z^{N_r} \rangle - 1}{N_r}. \quad (1.20)$$

Суммирование по α от 1 до N_r в действии (1.16) как раз и служит для того, чтобы рассматривать N_r копий (реплик) системы.

Как оказывается, в данном случае представление Матцубары более удобно, чем представление в мнимом времени [44]. Поэтому сделаем преобразование Фурье от мнимого времени к матцубаровским частотам $\omega_n = \pi T(2n + 1)$, где n – целое. Соответственно,

$$\overline{\psi^{\alpha, \sigma}}(\mathbf{r}, \tau) = \sqrt{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\psi_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}}(\mathbf{r}) e^{i\omega_n \tau}, \quad \psi^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r}, \tau) = \sqrt{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n \tau}. \quad (1.21)$$

В дальнейшем мы будем опускать пределы в суммах по частотам и репликам системы. В представлении Матцубары действие (1.16) становится равным

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha, \omega_n} \left[\overline{\psi_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}}(\mathbf{r}) \left(i\omega_n + \mu - \mathcal{H}_0 - V_{\text{dis}}(\mathbf{r}) \right) \psi_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r}) - \frac{T}{2} \sum_{\omega_m, \nu_l} \int d\mathbf{r}' \overline{\psi_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}}(\mathbf{r}) \right. \\ \left. \times \psi_{\omega_n - \nu_l}^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r}) U_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \overline{\psi_{\omega_m}^{\alpha, \sigma'}}(\mathbf{r}') \psi_{\omega_m + \nu_l}^{\alpha, \sigma'}(\mathbf{r}') \right], \end{aligned} \quad (1.22)$$

где $\nu_l = 2\pi Tl$ – бозонная матцубаровская частота.

На этом этапе пренебрегается зеемановским членом в действии (1.22) из-за малости g -фактора. Тем не менее, зеемановский член будет учтен в эффективном действии после интегрирования по быстрым переменным. Для упрощения записи будем объединять спиновый индекс с репличным там, где это удобно.

1.2.3 Плазмонное поле и усреднение по случайному потенциалу

Член с взаимодействием в действии (1.22) содержит четыре фермионных поля. Произведем преобразование Хаббарда – Стратоновича [49], вводя дополнительное интегрирование по бозонному полю $\lambda_{\nu_n}^\alpha(\mathbf{r})$. С помощью этого поля, которое принято называть *плазмонным*, член с взаимодействием в (1.22) перепишется в виде

$$\int \mathcal{D}[\lambda] \exp \left[-\frac{T}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \lambda^\dagger(\mathbf{r}) U_0^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \lambda(\mathbf{r}') + iT \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\lambda}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \right], \quad (1.23)$$

где U_0^{-1} обозначает оператор обратный U_0 . Здесь используется матричная запись в пространстве реплик и частот

$$\psi^\dagger(\dots) \psi = \sum_{\omega_n, \omega_m}^{\alpha, \beta} \overline{\psi_{\omega_n}^\alpha}(\dots)^{\alpha\beta} \psi_{\omega_m}^\beta, \quad \lambda^\dagger(\dots) \lambda = \sum_{\nu_n}^{\alpha} \lambda_{-\nu_n}^\alpha(\dots) \lambda_{\nu_n}^\alpha \quad (1.24)$$

Величины со “шляпкой” определены как

$$\hat{z} = \sum_{\nu_n}^{\alpha} z_{\nu_n}^\alpha I_n^\alpha, \quad (1.25)$$

причем матрицы

$$(I_n^\alpha)^{\beta\gamma}_{kl} = \delta^{\alpha\beta} \delta^{\alpha\gamma} \delta_{k-l, n} \quad (1.26)$$

представляют собой генераторы $U(1)$ калибровочных преобразований. Мера в функциональном интеграле (1.23) выбрана таким образом, что интеграл равен единице когда фермионные поля $\psi^\dagger$ и ψ формально равны нулю.

Вычисление статистической суммы (1.15) удобно начать с интегрирования по случайному потенциалу $V_{\text{dis}}(\mathbf{r})$. Это приводит к появлению в действии следующего четверичного члена

$$\frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{\omega_n \omega_m}^{\alpha\beta} \overline{\psi_{\omega_n}^\alpha}(\mathbf{r}) \psi_{\omega_n}^\alpha(\mathbf{r}) \overline{\psi_{\omega_m}^\beta}(\mathbf{r}) \psi_{\omega_m}^\beta(\mathbf{r}). \quad (1.27)$$

Член (1.27) тоже может быть преобразован с помощью преобразования Хаббарда – Стратоновича [49]. Следуя работе [50], вводим дополнительное

интегрирование по эрмитовому матричному полю $Q_{nm}^{\alpha\beta}(\mathbf{r})$

$$\int \mathcal{D}[Q] \exp \int d\mathbf{r} \left[-\frac{1}{2g} \text{tr} Q^2(\mathbf{r}) + i\psi^\dagger(\mathbf{r})Q(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \right]. \quad (1.28)$$

Символ tr обозначает след по матцубаровским частотам, репличным и спиновым индексам. Мера в функциональном интеграле (1.28) определена также как и в функциональном интеграле (1.23), т.е. интеграл (1.28) равен единице когда фермионные поля $\psi^\dagger$ и ψ формально равны нулю.

Таким образом, статистическая сумма (1.15) становится равной

$$Z = \int \mathcal{D}[\bar{\psi}, \psi, \lambda, Q] \exp \mathcal{S}[\bar{\psi}, \psi, \lambda, Q], \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & -\frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} \text{tr} Q^2 - \frac{T}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \lambda^\dagger(\mathbf{r}) U_0^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \lambda(\mathbf{r}') \\ & + \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(i\omega + \mu - \mathcal{H}_0 + iT\hat{\lambda} + iQ \right) \psi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Здесь введена матрица ω , которая является единичной матрицей в репличном пространстве, тогда как в пространстве матцубаровских частот она содержит частоты ω_n на диагоналях,

$$(\omega)_{nm}^{\alpha\beta} = \omega_n \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta}. \quad (1.31)$$

1.2.4 Выделение N -ого уровня Ландау

Фермионные поля $\psi^\dagger$ и ψ содержат компоненты всех уровней Ландау. Для того, чтобы проинтегрировать по всем фермионным степеням свободы не принадлежащим N -ому уровню Ландау, разделим их на два вида. Первые принадлежат N -ому уровню Ландау

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_k \psi_{Nk} \phi_{Nk}(\mathbf{r}), \quad \Psi^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_k \psi_{Nk}^\dagger \phi_{Nk}(\mathbf{r}), \quad (1.32)$$

а вторые всем остальным уровням

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{p \neq N, k} \psi_{pk} \phi_{pk}(\mathbf{r}), \quad \Phi^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_{p \neq N, k} \psi_{pk}^\dagger \phi_{pk}(\mathbf{r}). \quad (1.33)$$

Здесь $\phi_{pk}(\mathbf{r})$ – это собственные функции гамильтониана $\mathcal{H}_0$, индекс $p = 0, 1, \dots, N, \dots$ нумерует уровни Ландау с энергиями $\epsilon_p = \omega_H(p + 1/2)$, а k обозначает псевдомомент. Соответственно, введем два типа функций Грина [44]: для N -ого уровня Ландау

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; Q, \lambda) = \sum_{k, k'} \phi_{Nk}^*(\mathbf{r}) G_{Nk, Nk'}(Q, \lambda) \phi_{Nk'}(\mathbf{r}'), \quad (1.34)$$

и для всех остальных уровней

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; Q, \lambda) = \sum_{p, p' \neq N} \sum_{k, k'} \phi_{pk}^*(\mathbf{r}) G_{pk, p'k'}(Q, \lambda) \phi_{p'k'}(\mathbf{r}'), \quad (1.35)$$

где функция Грина для полей ψ_{pk} и $\psi_{p'k'}^\dagger$ задается следующим соотношением

$$(G^{-1})_{pk, p'k'} = (i\omega + \mu - \epsilon_p) \delta_{pp'} \delta_{kk'} + iT \hat{\lambda}_{pk, p'k'} + iQ_{pk, p'k'}, \quad (1.36)$$

причем матричные элементы определены как

$$f_{pk, p'k'} = \int d\mathbf{r} \phi_{p'k'}^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) \phi_{pk}(\mathbf{r}). \quad (1.37)$$

Действие (1.30) квадратично по фермионным полям $\psi^\dagger$ и ψ , а значит, очевидно, оно квадратично и по полям $\Phi^\dagger$ и Φ , поэтому удобно сразу проинтегрировать по ним. Тогда получаем следующий результат

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & - \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} \ln \tilde{G} - \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} Q^2 + \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger \left[i\omega + \mu - \mathcal{H}_0 + iT \hat{\lambda} + iQ \right] \Psi \\ & - \frac{T}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \lambda^\dagger U_0^{-1} \lambda + \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi^\dagger [Q + T \hat{\lambda}] \tilde{G} [Q + T \hat{\lambda}] \Psi. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Здесь и ниже пространственные индексы опущены для краткости. Отметим, что последний член в (1.38) появляется из-за взаимодействия электронов на N -ом уровне Ландау с электронами на других уровнях.

1.2.5 Перевальное решение для поля Q в отсутствие плазмонного поля $\lambda_{\nu_n}^\alpha(\mathbf{r})$

Вернемся назад к действию (1.30), которое в отсутствие плазмонного поля $\lambda_{\nu_n}^\alpha(\mathbf{r})$ принимает простой вид

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} Q^2 + \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) (i\omega + \mu - \mathcal{H}_0 + iQ) \psi(\mathbf{r}). \quad (1.39)$$

Это действие имеет следующее перевальное решение для матричного поля $Q(\mathbf{r})$ при нулевой температуре ($\omega_n \rightarrow 0$) [50]

$$Q_{\text{sp}} = V^{-1} P_{\text{sp}} V. \quad (1.40)$$

Здесь постоянная унитарная матрица V описывает глобальные повороты, относительно которых действие (1.39) инвариантно при $\omega = 0$, а матрица P_{sp} удовлетворяет уравнению

$$P_{\text{sp}} = ig \left[G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}) + \tilde{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \right], \quad (1.41)$$

причем функции Грина G_0 и $\tilde{G}_0$ определены через G и $\tilde{G}$ как

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; P_{\text{sp}}, 0), \quad \tilde{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; P_{\text{sp}}, 0). \quad (1.42)$$

Отметим, что уравнение (1.41) совпадает с уравнением на собственнo-энергетическую часть в самосогласованном борновском приближении [41]. Решение уравнения (1.41) может быть записано в виде

$$(P_{\text{sp}})_{nm}^{\alpha\beta} = \frac{\text{sgn } \omega_n}{2\tau} \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta}, \quad (1.43)$$

где в рассматриваемом случае *слабого* магнитного поля ($\omega_H \tau \gg 1$) величина $1/(2\tau)$ имеет вид [41]

$$\frac{1}{2\tau} = \sqrt{gn_L}. \quad (1.44)$$

В связи со структурой переального решения (1.41) для поля Q , его удобно разделить на поперечную V и продольную P компоненты,

$$Q(\mathbf{r}) = V^{-1}(\mathbf{r}) P(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}). \quad (1.45)$$

Продольная компонента $P(\mathbf{r})$ имеет блок-диагональную структуру в матцубаровском пространстве, т.е. $P_{nm}^{\alpha\beta} \propto \Theta(nm)$, где $\Theta(x)$ – функция Хевисайда [51]. Поперечная компонента $V(\mathbf{r})$ отвечает локальному унитарному вращению. Хорошо известно, что флуктуации поля $V(\mathbf{r})$ описывают взаимодействие диффузных мод [50], которое приводит

к появлению, так называемых, слаболокализационных поправок к проводимости (максимально пересекающиеся диаграммы) [52]. Однако, для рассматриваемой ситуации *слабого* магнитного поля эти поправки оказываются порядка $\ln N/N \ll 1$ и могут не учитываться. Поэтому в дальнейшем будем полагать $V(\mathbf{r}) = 1$.

1.2.6 Сдвиг перевального решения плазмонным полем $\lambda_{\nu_n}^\alpha(\mathbf{r})$

Наличие плазмонного поля $\lambda_{\nu_n}^\alpha(\mathbf{r})$ в действии (1.30) приводит к сдвигу перевального решения (1.41) для поля $P(\mathbf{r})$. Для того, чтобы учесть этот факт, удобно представить поле $P(\mathbf{r})$, как $P(\mathbf{r}) = P_{\text{sp}} + \delta P(\mathbf{r})$, где отличие $\delta P(\mathbf{r})$ от нуля и учитывает влияние плазмонного поля. Предположение о выполнении условий $r_s \ll 1$, $Nr_s \gg 1$ и $1/2\tau \gg (\omega_H/N) \ln \sqrt{2}r_s N$ позволяет выполнять функциональное интегрирование в (1.29) по плазмонному полю $\lambda_{\nu_n}^\alpha(\mathbf{r})$ только в квадратичном приближении. Разлагая действие (1.38) по плазмонному полю до второго порядка, получаем, что

$$\mathcal{S} = \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger \left[G_0^{-1} + iT\hat{\lambda} + i\delta P \right] \Psi - \frac{T}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \lambda^\dagger U_0^{-1} \lambda + \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3, \quad (1.46)$$

где

$$\mathcal{S}_1 = -\frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} \text{tr}(P_{\text{sp}} + \delta P)^2 + \int d\mathbf{r} \text{tr} \ln \left[\tilde{G}_0^{-1} + i\delta P \right]. \quad (1.47)$$

Следующий член имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 = iT \int d\mathbf{r} \text{tr} \hat{\lambda} \tilde{G}_0 + T \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \text{tr} \hat{\lambda} \tilde{G}_0 \delta P \tilde{G}_0 + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \text{tr} \hat{\lambda} \tilde{G}_0 \hat{\lambda} \tilde{G}_0 \\ + \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \text{tr} [\delta P + T\hat{\lambda}] \tilde{G}_0 [\delta P + T\hat{\lambda}] G_0, \end{aligned} \quad (1.48)$$

Последний член в (1.46) равен

$$\mathcal{S}_3 = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left\{ \Psi^\dagger [\delta P + T\hat{\lambda}] \tilde{G}_0 [\delta P + T\hat{\lambda}] \Psi - \text{tr} [\delta P + T\hat{\lambda}] \tilde{G}_0 [\delta P + T\hat{\lambda}] G_0 \right\}, \quad (1.49)$$

и, как оказывается, определяет перенормировку термодинамического и химического потенциалов (см. Раз. 1.7). Отметим, что в уравнениях (1.48)

и (1.49) точные функции Грина $\tilde{G}$ и G были заменены на перевальные $\tilde{G}_0$ и G_0 , так как учет их отличия друг от друга приводит к членам более высоких степеней N_r , а потому обращающихся в нуль в репличном пределе $N_r \rightarrow 0$.

Часть $\mathcal{S}_2$ действия (1.46) содержит члены как линейные так и квадратичные по плазмонному полю. Член квадратичный по плазмонному полю имеет вид

$$-\frac{T^2}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \text{tr} \hat{\lambda} \pi_0 \hat{\lambda}. \quad (1.50)$$

Здесь поляризационный оператор π_0 является матрицей, причем

$$\text{tr} A \pi_0 B = \sum_{\nu_n \omega_m}^{\alpha\beta} A_{m+n,m}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \pi_0^{\omega_m}(\nu_n; \mathbf{r}, \mathbf{r}') B_{m,m+n}^{\beta\alpha}(\mathbf{r}'), \quad (1.51)$$

и определяется следующим уравнением

$$\begin{aligned} \pi_0^{\omega_m}(\nu_n; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = & -2 \left(\tilde{G}_0^{\omega_m+\nu_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{G}_0^{\omega_m}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \tilde{G}_0^{\omega_m+\nu_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_0^{\omega_m}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right. \\ & \left. + G_0^{\omega_m+\nu_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{G}_0^{\omega_m}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Линейный по плазмонному полю член описывает его взаимодействие с полем δP , которое, так как мы работаем в квадратичном приближении, приводит к

$$-T \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \text{tr} \hat{\lambda} \pi_0 \delta P \rightarrow \frac{T^2}{2} \left\langle \left(\int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \text{tr} \hat{\lambda} \pi_0 \delta P \right)^2 \right\rangle_{\delta P}. \quad (1.53)$$

Символ $\langle \dots \rangle_{\delta P}$ обозначает усреднение по полю δP , которое достаточно выполнить в квадратичном приближении. Функция Грина полей δP , знание которой для этого необходимо, определяется квадратичными по полю δP членами в $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ и имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \delta P_{m_1 m_2}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) \delta P_{m_3 m_4}^{\gamma\delta}(-\mathbf{q}) \rangle = & \frac{g \delta_{m_1 m_4} \delta_{m_2 m_3} \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma} \Theta(m_1 m_3)}{1 + g \pi_0^{\omega_{m_1}}(\omega_{m_3} - \omega_{m_1}; q)} - 2 \frac{1 - \Theta(m_1 m_3)}{\pi^2 \rho^2} \\ & \times \frac{g \delta_{m_1 m_2} \delta^{\alpha\beta}}{1 + g \pi_0^{\omega_{m_1}}(0; q)} \frac{g \delta_{m_3 m_4} \delta^{\gamma\delta}}{1 + g \pi_0^{\omega_{m_3}}(0; q)}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Заметим, что после разделения матричного поля Q на блок-диагональную эрмитову матрицу P и унитарную V , мера функционального интеграла в

(1.29) становится $\mathcal{D}[Q] = \mathcal{D}[V]\mathcal{D}[\delta P]I[\delta P]$, причем якобиан преобразования $I[\delta P]$, определяемый как [51, 54]

$$\ln I[\delta P] = -\frac{1}{(\pi\rho)^2} \int d\mathbf{r} \sum_{\omega_n \omega_m}^{\alpha\beta} [1 - \Theta(nm)] \delta P_{nn}^{\alpha\alpha}(\mathbf{r}) \delta P_{mm}^{\beta\beta}(\mathbf{r}), \quad (1.55)$$

приводит к появлению второго члена в выражении (1.54). Отметим, что функция Грина для продольных флуктуаций (1.54) оказывается аналогичной функции Грина для продольных флуктуаций в ранее рассматривавшейся задаче о поведении свободных электронов в перпендикулярном магнитном поле [51].

Используя выражение (1.54) для функции Грина поля δP , получаем следующий результат

$$Z = \int \mathcal{D}[\Psi, \bar{\Psi}, \delta P, \lambda] I[\delta P] \exp \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} = -\frac{\Omega_0}{T} + \mathcal{S}_N + \mathcal{S}_\lambda + \mathcal{S}_\mu. \quad (1.56)$$

Здесь термодинамический потенциал невзаимодействующих электронов на полностью заполненных уровнях Ландау с учетом наличия примесей равен

$$\Omega_0 = -T \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} \ln [\tilde{G}_0^{-1} + i\delta P]. \quad (1.57)$$

Член

$$\mathcal{S}_N = -\frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} (P_{\text{sp}} + \delta P)^2 + \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger [G_0^{-1} + iT\hat{\lambda} + i\delta P] \Psi \quad (1.58)$$

описывает электроны на N -ом уровне Ландау, взаимодействующие с плазмонным полем $\lambda_{\nu_n}^\alpha(\mathbf{r})$ и полем δP . Член $\mathcal{S}_\lambda$ описывает экранирование кулоновского взаимодействия из-за влияния электронов с других уровней Ландау

$$S_\lambda = iT \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} \tilde{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \hat{\lambda}(\mathbf{r}) - \frac{T}{2} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \sum_{\nu_n}^\alpha \lambda_{-\nu_n}^\alpha(\mathbf{q}) U_0^{-1}(q) \varepsilon(\nu_n, q) \lambda_{\nu_n}^\alpha(-\mathbf{q}) \quad (1.59)$$

с помощью эффективной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(\nu_n, q) = 1 + U_0(q) \Pi(\nu_n, q), \quad (1.60)$$

которая определяется через поляризационный оператор

$$\begin{aligned} \Pi(\nu_n, q) = T \sum_{\omega_m} \pi_0^{\omega_m}(\nu_n, q) \left[1 - \frac{g\Theta(n(n+m))\pi_0^{\omega_m}(\nu_n, q)}{1 + g\pi_0^{\omega_m}(\nu_n, q)} \right] \\ + \frac{4T\delta_{n,0}}{\pi^2\rho^2} \sum_{\omega_k\omega_m} \frac{g[1 - \Theta(km)]\pi_0^{\omega_m}(0, q)}{1 + g\pi_0^{\omega_m}(0, q)} \frac{g\pi_0^{\omega_k}(0, q)}{1 + g\pi_0^{\omega_k}(0, q)}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Последний член S_μ в действии (1.56) содержит члены, которые перенормируют химический и термодинамический потенциалы системы (см. Раз. 1.7).

1.2.7 Эффективное действие

Теперь, в выражении (1.56) можно проинтегрировать по плазмонному полю $\lambda_{\nu_n}^\alpha(\mathbf{r})$. После интегрирования получается эффективное действие для электронов на N -ом уровне Ландау, которое является основным результатом этой главы,

$$Z = \int \mathcal{D}[\Psi, \bar{\Psi}, Q] \exp \mathcal{S}_{\text{eff}}[\Psi, \bar{\Psi}, Q], \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{eff}} = -\frac{\Omega}{T} + \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) [i\omega + \tilde{\mu} - \mathcal{H} + iQ] \Psi(\mathbf{r}) - \frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} \text{tr} Q^2(\mathbf{r}) \\ - \frac{T}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_{\omega_m\omega_k\nu_n}^\alpha \bar{\Psi}_{\omega_m}^{\alpha,\sigma}(\mathbf{r}) \Psi_{\omega_m+\nu_n}^{\alpha,\sigma}(\mathbf{r}) U_{\text{scr}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bar{\Psi}_{\omega_k}^{\alpha,\sigma'}(\mathbf{r}') \Psi_{\omega_k-\nu_n}^{\alpha,\sigma'}(\mathbf{r}') \\ + \frac{g_0\omega_H}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{\omega_m}^\alpha \sigma \bar{\Psi}_{\omega_m}^{\alpha,\sigma}(\mathbf{r}) \Psi_{\omega_m}^{\alpha,\sigma}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Здесь также добавлен Зеемановский член. Фурье-образ экранированного потенциала взаимодействия

$$U_{\text{scr}}(q) = \frac{U_0(q)}{\varepsilon(q)} \quad (1.64)$$

определяется статической эффективной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(q) \equiv \varepsilon(0, q)$. Вообще говоря, низкоэнергетические свойства системы должны описываться с помощью запаздывающего взаимодействия (см. действие



Рис. 1.1: Уравнение для экранированного взаимодействия (жирная волнистая линия). Тонкая волнистая линия обозначает затравочное кулоновское взаимодействие, сплошная линия обозначает функцию Грина $\tilde{G}_0$, а заштрихованный блок – это лестница из примесных линий.

(1.56)). Однако, приближение его в эффективном действии мгновенным взаимодействием оказывается оправданным [20]. Это связано с тем, что переходы между уровнями Ландау имеют характерное время ω_H^{-1} тогда как характерный масштаб энергии в эффективном действии порядка $\Delta_{ex} \ll \omega_H$ (см. Раз. 1.4).

Также отметим, что результат (1.64) для эффективного взаимодействия соответствует приближению случайных фаз [36]. Диаграмма, которая соответствует результату (1.64) в стандартной *крестовой* технике, представлена на Рис. 1.1.

Термодинамический потенциал Ω в действии (1.63) равен

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega, \quad (1.65)$$

где $\Delta\Omega$ содержит обменную и корреляционную поправки с учетом примесей. Эти поправки по структуре эквивалентны обменным и корреляционным поправкам к энергии основного состояния чистой электронной жидкости [2]

$$\Delta\Omega = -\frac{T}{2} \int d^2\mathbf{r} \sum_{\nu_n} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \ln \varepsilon(\nu_n, \mathbf{q}). \quad (1.66)$$

Химический потенциал $\tilde{\mu}$ в действии (1.63) может быть записан как

$$\tilde{\mu} = \mu + \delta\mu, \quad (1.67)$$

где поправка $\delta\mu$ равна

$$\delta\mu = 2\pi l_H^2 T \sum_n \int d\mathbf{r} \tilde{G}_0^{\omega_n}(0, \vec{r}) P_N(0, \mathbf{r}) U_{\text{scr}}(\nu_n, \mathbf{r}) \quad (1.68)$$

и содержит поправки аналогичные обменным и корреляционным поправкам в чистой электронной жидкости [20]. Величина $U_{\text{scr}}(\nu_n, \mathbf{r})$ есть Фурье преобразование от величины $U_0(\mathbf{q})/\varepsilon(\nu_n, \mathbf{q})$, а

$$P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_k \phi_{Nk}^*(\mathbf{r}_2) \phi_{Nk}(\mathbf{r}_1) = n_L \exp\left(i \frac{(y_1 - y_2)(x_1 + x_2)}{2l_H^2}\right) \quad (1.69)$$

$$\times \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{4l_H^2}\right) L_N\left(\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{2l_H^2}\right)$$

представляет собой проекционный оператор на N -ый уровень Ландау. Здесь $L_N(x)$ обозначает полином Лагерра. Заметим, что поправки к термодинамическому и химическому потенциалу также содержат члены, которые не выписаны выше, так как они малы по параметру $(\omega_H \tau)^{-1} \ll 1$ (см. Раз. 1.7).

Интегрирование по плазмонному полю было проведено в квадратичном приближении. Это может быть оправдано, только если флуктуации плазмонного поля малы. Поведение флуктуаций на больших и малых расстояниях различно, поэтому мы рассмотрим их отдельно. На больших расстояниях $r \gg R_c$, только дипольные переходы между ближайшими уровнями Ландау возможны. Поэтому флуктуации плазмонного поля на больших расстояниях малы, если выполняются условия $Nr_s \gg 1$ и $1/2\tau \gg (\omega_H/N) \ln \sqrt{2}r_s N$. Первое условие физически означает, что характерный масштаб флуктуаций R_c^2/a_B должен быть много больше циклотронного радиуса R_c . На малых расстояниях $r \ll R_c$ становятся возможными переходы между далекими уровнями Ландау. Флуктуации плазмонного поля малы в

этом случае, если выполняется стандартное условие $r_s \ll 1$, позволяющее применять теорию возмущений к кулоновскому взаимодействию.

1.3 Экранированное взаимодействие, химический и термодинамический потенциалы

Результаты предыдущего раздела позволяют найти основную физическую величину, которая влияет на динамику электронов на N -ом уровне Ландау, — экранированное электрон-электронное взаимодействие $U_{\text{scr}}(\mathbf{r})$. Оно полностью определяется эффективной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(q)$. Две другие величины входящие в эффективное действие (1.63) — это химический и термодинамический потенциалы.

1.3.1 Экранированное взаимодействие

Основной эффект от электронов на полностью заполненных нижних уровнях Ландау — это экранирование взаимодействия между электронами на последнем уровне Ландау. Это экранирование определяется эффективной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(q)$. Согласно уравнению (1.61) для поляризационного оператора $\Pi(\nu_n, q)$, эффективная диэлектрическая проницаемость может быть вычислена при произвольном значении параметра $(\omega_H \tau)^{-1}$. Однако, случай малого примесного уширения уровня Ландау представляет наибольший интерес с физической точки зрения. В пределе $(\omega_H \tau)^{-1} \ll 1$ выражение для эффективной диэлектрической проницаемости существенно упрощается

$$\varepsilon(q) = 1 + \frac{2\pi e^2}{q} T \sum_{\omega_n} \pi_0^{\omega_n}(0, q), \quad \omega_H \tau \gg 1. \quad (1.70)$$

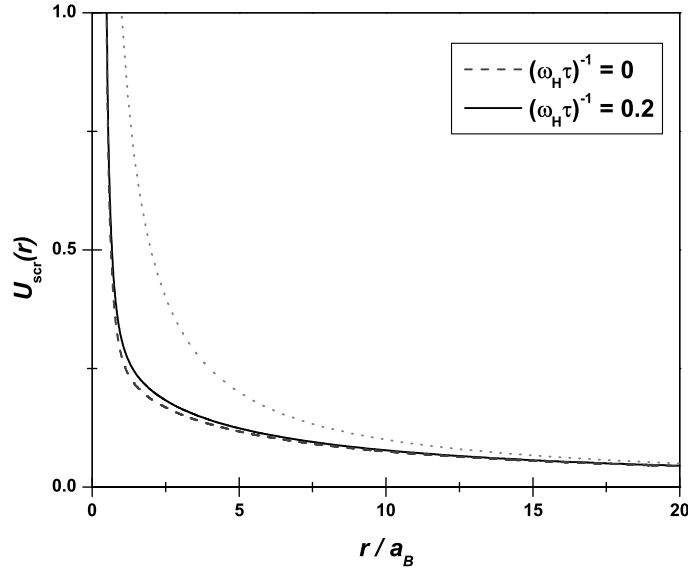


Рис. 1.2: Экранированное взаимодействие $U_{\text{scr}}(r)$ в единицах e^2/a_B как функция r/a_B при значении параметра $R_c/a_B = 3$. Для сравнения показана зависимость затравочного кулоновского взаимодействия (точечная линия).

Вычисление эффективной диэлектрической проницаемости представлено в Раз. 1.8. Результат может быть записан как

$$\varepsilon(q) = 1 + \frac{2}{qa_B} \left(1 - \frac{\pi}{6\tau\omega_H} \right) (1 - \mathcal{J}_0^2(qR_c)), \quad (1.71)$$

где $\mathcal{J}_0(x)$ обозначает функцию Бесселя первого рода. Выражение (1.71) для эффективной диэлектрической проницаемости является одним из главных результатов этой главы. Мы видим, что примеси уменьшают эффект экранирования. Можно ожидать, что при примесном уширении уровня Ландау $\tau^{-1} \sim \omega_H$ эффект экранирования пропадет, в связи с исчезновением смысла вообще говорить об отдельных уровнях Ландау.

Заметим, что асимптотические выражения (в областях $qR_c \ll 1$ и $qR_c \gg 1$) для эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(q)$ в *чистом* случае ($\tau^{-1} = 0$) были впервые получены Кукушкиным, Мешковым и Тимофеевым [42]. Общее выражение для эффективной

диэлектрической проницаемости в *чистом* случае было получено Алейнером и Глазманом [20]. Асимптотическое поведение эффективной диэлектрической проницаемости может быть получено из простых физических соображений, что в области $qR_c \ll 1$ поведение определяется дипольными переходами между ближайшими уровнями Ландау, а в области $qR_c \gg 1$ стандартным приближением Томаса-Ферми [55]. Однако в случае наличия *слабого* беспорядка такое простое рассмотрение проведено быть не может и единственный способ определить эффективную диэлектрическую проницаемость – это вывести эффективное действие (1.63).

Согласно уравнению (1.71) в области $qR_c \ll 1$ эффективная диэлектрическая проницаемость ведет себя как

$$\varepsilon(q) = 1 + \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H\tau}\right) \frac{R_c^2 q}{a_B} \quad (1.72)$$

В области $qR_c \gg 1$ эффективная диэлектрическая проницаемость определяется следующей асимптотической формулой

$$\varepsilon(q) = 1 + \frac{2}{qa_B} \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H\tau}\right) \left(1 - \frac{1 + \sin 2qR_c}{\pi qR_c}\right) \quad (1.73)$$

Уравнение (1.71) позволяет получить асимптотическое поведение экранированного взаимодействия $U_{\text{scr}}(r)$. На очень больших расстояниях $r \gg R_c^2/a_B$ поляризация не существенна и эффект экранирования мал

$$U_{\text{scr}}(r) = \frac{e^2}{r} \left(1 - \frac{R_c^4}{a_B^2 r^2} \left[1 - \frac{\pi}{3\omega_H\tau}\right]\right) \quad (1.74)$$

На промежуточных масштабах $R_c^2/a_B \gg r \gg R_c$ поляризация становится существенной и

$$U_{\text{scr}}(r) = \frac{e^2 a_B}{R_c^2 \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H\tau}\right)} \ln \left(1 + \frac{R_c^2}{a_B r} \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H\tau}\right)\right) \quad (1.75)$$

На малых расстояниях $R_c \gg r \gg a_B$ происходит экранирование по Томасу-Ферми

$$U_{\text{scr}}(r) = \frac{e^2 a_B^2}{r^3} \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H\tau}\right) \quad (1.76)$$

Зависимость экранированного взаимодействия $U_{\text{scr}}(r)$ представлена на рисунке 1.2. Подчеркнем, что примеси оказывают наибольшее влияние на зависимость экранированного взаимодействия $U_{\text{scr}}(r)$ от r на промежуточных длинах $R_c^2/a_B \gg r \gg R_c$.

1.3.2 Химический и термодинамический потенциалы

Химический и термодинамический потенциалы (1.66)-(1.68) могут быть вычислены разложением по $1/N$. Детали вычислений представлены в Раз. 1.9.

Термодинамический потенциал Ω_0 для системы невзаимодействующих электронов на полностью заполненных уровнях Ландау в присутствие примесей содержит поле Q (см. уравнение (1.57)). Это означает, что при дальнейшем рассмотрении электронов на N -ом уровне Ландау в рамках эффективного действия (1.63) необходимо учитывать член Ω_0 в динамике поля Q . Однако, оказывается, что это приводит к поправкам следующего порядка по параметру $\max\{T, \tau^{-1}\}/\omega_H$, которыми во всех рассматриваемых ниже задачах (кроме главы 3), можно пренебречь.

Обменная поправка первого порядка по взаимодействию дает основной вклад в термодинамический потенциал и равна

$$\Delta\Omega = -\frac{S}{\pi l_H^2} \frac{e^2}{\pi l_H} (2N)^{3/2} \left[\frac{2}{3} + \frac{2 \ln 2}{\pi \omega_H \tau} \frac{1}{2N} \right]. \quad (1.77)$$

Отметим, что наличие примесей меняет зависимость $\Delta\Omega$ от магнитного поля, т.е. зависимость от N . Отметим, что в рассматриваемом случае *слабого* беспорядка второй член в уравнении (1.77) пропорционален $1/N$, тогда как в *чистом* случае он много меньше, так как пропорционален $1/N^2$ [20].

Обменная поправка к химическому потенциалу равна (см. Раз. 1.9)

$$\delta\mu = \frac{2e^2}{\pi l_H} (2N)^{1/2} \left[1 - \frac{\ln N}{8N} + \frac{1}{\pi \omega_c \tau} \frac{1}{2N} \right]. \quad (1.78)$$



Рис. 1.3: Диаграммы для собственноэнергитической части: а) самосогласованное борновское приближение, б) диаграмма с пересекающимися примесной линией (пунктирная кривая) и линией взаимодействия (ломанная). Сплошная линия соответствует функции Грина.

1.3.3 Ограничение на ширину уровня Ландау

При наличии экранированного электрон-электронного взаимодействия $U_{\text{scr}}(q)$ для ширины уровня Ландау кроме стандартной диаграммы самосогласованного борновского приближения (Рис. 1.3а) необходимо учитывать диаграммы с пересекающимися примесными линиями и линиями взаимодействия, аналогичные представленной на Рис. 1.3б. Эта диаграмма может быть оценена как

$$g \left(\frac{1}{2\tau} \right)^{-2} n_L \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} U_{\text{scr}}(q) L_N^4 \left(\frac{q^2 l_H^2}{2} \right) \exp(-q^2 l_H^2) \simeq \frac{\omega_H}{N} \ln(\sqrt{2} r_s N). \quad (1.79)$$

Требуя, чтобы этот вклад был мал по сравнению с диаграммой на Рис. 1.3а, получаем условие, что

$$\frac{\omega_H}{N} \ln(\sqrt{2} r_s N) \ll \frac{1}{2\tau}. \quad (1.80)$$

1.4 Эффективный g -фактор, спектр и время жизни СПИНОВЫХ ВОЛН

В предыдущем разделе мы проанализировали экранирование взаимодействия электронов на последнем N -ом занятом уровне Ландау за счет электронов с

других уровней. В этом разделе мы изучим влияние примесей на g -фактор и спектр спиновых волн при $\nu = 2N + 1$.

1.4.1 Эффективный g -фактор

Как показывают численные исследования [56], электроны на последнем N -ом занятом уровне Ландау образуют спин-поляризованное основное состояние, которое описывается следующей волновой функцией

$$|N_{el} = S n_L, S_z = S n_L/2\rangle, \quad (1.81)$$

где N_{el} – это число электронов на N -ом уровне Ландау. Простейшее возбуждение имеет энергию $E_\uparrow$ и является состоянием с лишней дыркой, либо имеет энергию $E_\downarrow$ и является состоянием с лишним электроном. Согласно работам [57, 58], удобно ввести величину Δ_s , связанную с энергиями возбужденных состояний и с энергией основного состояния E_0 как

$$\Delta_s = E_\uparrow + E_\downarrow - 2E_0. \quad (1.82)$$

Следуя работам [59, 58], можно получить, что

$$\Delta_s = g_0 \omega_H + \Delta_{ex}, \quad (1.83)$$

где Δ_{ex} – это обменная поправка к химическому потенциалу из-за взаимодействия электронов уже на N -ом уровне, равная

$$\Delta_{ex} = 2\pi l_H^2 \int d\mathbf{r} U_{scr}(\mathbf{r}) P_N(0, \mathbf{r}) P_N(\mathbf{r}, 0). \quad (1.84)$$

Используя выражение (1.69) для проекционного оператора P_N вычисляем эффективный g -фактор, который определен как $g_{\text{eff}} = \Delta_s/\omega_H$. Таким образом, находим

$$g_{\text{eff}} = g_0 + \frac{r_s}{\pi\sqrt{2}} \ln \left[\frac{2\sqrt{2}}{r_s} \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H\tau} \right) \right] + \frac{1}{2N} \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H\tau} \right)^{-1} \times \ln \left[1 + \sqrt{2} r_s N \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H\tau} \right) \right]. \quad (1.85)$$

Отметим, что наличие примесей уменьшает эффективный g -фактор.

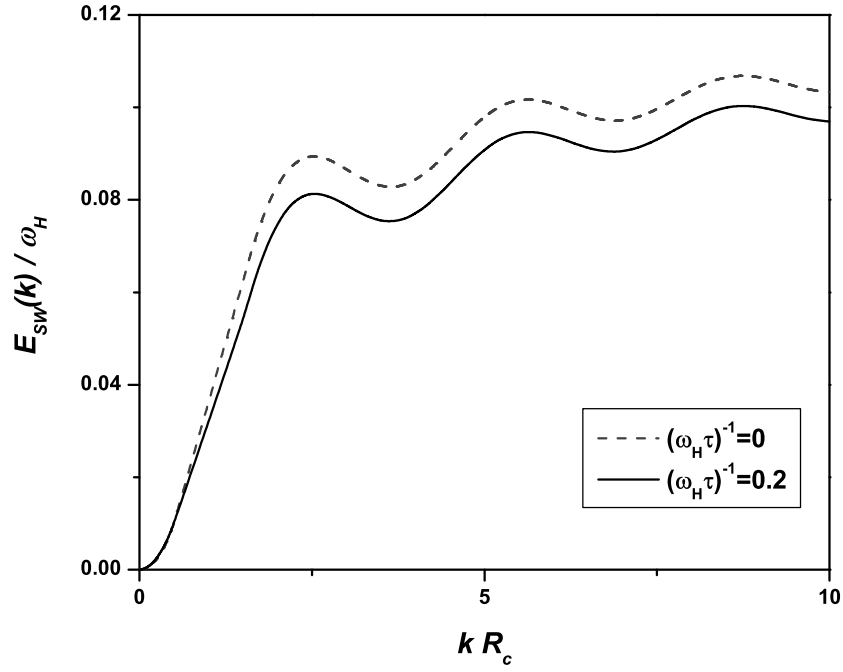


Рис. 1.4: Энергия $E_{SW}(k)$ спиновых волн при значениях параметров $r_s = 0.2$ и $N = 5$.

1.4.2 Спектр и время жизни спиновых волн

Теперь рассмотрим нейтральные возбуждения – спиновые волны [58, 60] при заполнении $\nu = 2N + 1$. Они описываются следующей волновой функцией

$$\sum_q e^{ik_x q l_H^2} \bar{\Psi}_{N,q,\downarrow} \Psi_{N,q-k_y,\uparrow} |S n_L, \frac{S n_L}{2}\rangle. \quad (1.86)$$

Следуя работе [58], мы должны учесть три вклада: во-первых, разность между обменной собственной энергией электрона на возбужденном уровне и уровне, с которого его убрали, во-вторых, прямое кулоновское взаимодействие, и в третьих, обменную энергию. Таким образом мы получаем уравнение, определяющее спектр спиновых волн $\omega = \omega(k) = E_{SW}(k) - i\Gamma_{SW}(k)$ в виде следующего уравнения

$$\omega = g_0 \omega_H + \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{U_0(q)}{\varepsilon(q, \omega)} \left[L_N \left(\frac{q^2 l_H^2}{2} \right) \right]^2 e^{-q^2 l_H^2 / 2} (1 - e^{i\mathbf{kq} l_H^2}). \quad (1.87)$$

Эффективная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(q, \omega)$ имеет мнимую часть порядка $(\omega_H \tau)^{-1}$ (см. уравнение (1.119)). Это приводит к появлению *конечного времени жизни* спиновых волн. Физически оно связано с

рассеянием спиновых волн на примесях. Заметим также, что *конечное время жизни* появляется и в спектре магнетоплазмонов. Энергия спиновых волн $\omega(k)$ по модулю много меньше ω_H , $|\omega(k)| \ll \omega_H$. Поэтому мы можем вычислять действительную $E_{SW}(k)$ и мнимую $\Gamma_{SW}(k)$ части энергии спиновых волн отдельно.

Для вычисления спектра $E_{SW}(k)$ можно положить ω нулем в правой части уравнения (1.87). Тогда получается квадратичный закон дисперсии на малых векторах $kR_c \ll 1$,

$$E_{SW}(k) = g_0\omega_H + \frac{r_s\omega_c}{\pi\sqrt{2}} \left[1 + \frac{r_s}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H\tau} \right) \right]^{-1} (kR_c)^2. \quad (1.88)$$

Отметим, что в присутствие примесей эффективная масса спиновых волн уменьшается. На достаточно больших волновых векторах $1 \ll kR_c \ll R_c^2/l_H^2$, энергия спиновых волн имеет следующий закон дисперсии

$$E_{SW}(k) = \frac{r_s\omega_H}{\pi\sqrt{2}} \ln \left[\frac{2\sqrt{2}}{r_s} \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H\tau} \right) \right] - \frac{r_s\omega_H}{\pi\sqrt{2}} \left[\frac{\sin 2kR_c}{2kR_c} \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{r_s}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H\tau} \right) \right) + \ln \left(1 + \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H\tau} \right)^{-1} (\sqrt{2}r_skR_c)^{-1} \right) \right]. \quad (1.89)$$

Полная зависимость энергии спиновых волн $E_{SW}(k)$ от волнового вектора k представлена на Рис. 1.4. Как видно, примеси приводят к уменьшению величины энергии спиновых волн, но качественно спектр остается таким же как и в *чистом* случае.

Для того, чтобы найти мнимую часть $\Gamma_{SW}(k)$ энергии спиновых волн, которая определяет их время жизни, используем малость мнимой части $\varepsilon''(q, \omega)$. Тогда получаем, что

$$\Gamma_{SW}(k) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{U_0(q)\varepsilon''(q, E_{SW})}{\varepsilon_0^2(q, E_{SW})} \left[L_N \left(\frac{q^2 l_H^2}{2} \right) \right]^2 e^{-q^2 l_H^2/2} \left(1 - e^{i\mathbf{kq}l_H^2} \right). \quad (1.90)$$

Выражение (1.90) приводит к квадратичной дисперсии мнимой части энергии спиновых волн на малых векторах $kR_c \ll 1$

$$\Gamma_{SW} = \frac{\arctan(2\omega_H\tau g_0)}{6\omega_H\tau} \frac{e^2}{a_B} \left(1 + \frac{l_H^2}{a_B R_c} \right)^{-2} \frac{2 - \sin 4N}{(4N)^2} (kR_c)^2. \quad (1.91)$$

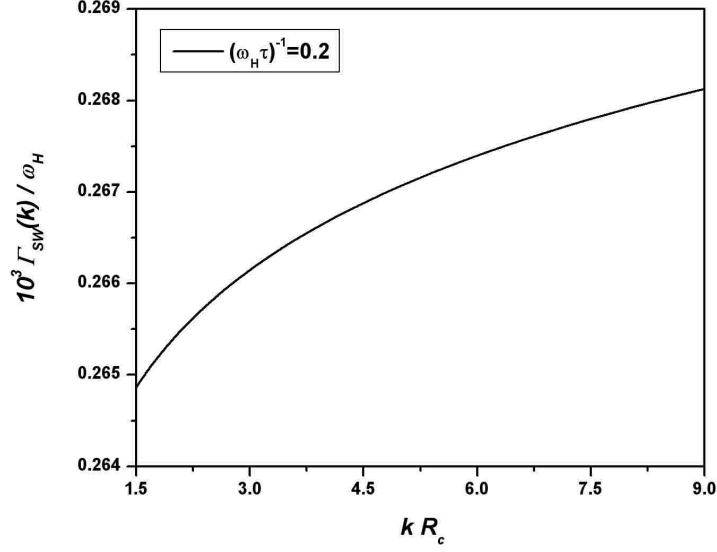


Рис. 1.5: Затухание $\Gamma_{SW}(k)$ спиновых волн при значениях параметров $r_s = 0.2$ и $N = 5$.

На достаточно больших волновых векторах $1 \ll k R_c \ll R_c^2 / l_H^2$, мнимая часть энергии спиновых волн имеет следующий закон дисперсии

$$\Gamma_{SW} = \frac{\arctan(2\omega_H \tau g_{eff})}{\pi \omega_H \tau} \frac{e^2}{a_B} \left[\left(\frac{a_B}{R_c} \right)^2 \ln \frac{R_c}{a_B} + \frac{\operatorname{arccosh}(2k R_c)}{2(4N)^2} \right]. \quad (1.92)$$

Зависимость мнимой части энергии спиновых волн $\Gamma_{SW}(k)$ от волнового вектора k представлена на Рис. 1.5. Как видно, она почти не зависит от волнового вектора k и на два порядка меньше, чем действительная часть. Пренебрегая вторым членом в выражении (1.92) можно написать следующую оценку снизу для времени жизни τ_{SW} спиновых волн

$$\frac{1}{\tau_{SW}} \lesssim \frac{1}{2\tau} \frac{e^2 a_B}{\omega_H R_c^2} \ln \frac{R_c}{a_B}. \quad (1.93)$$

1.5 Туннелирование на высокий уровень Ландау, заполненный на половину

Основной величиной, которой характеризуется туннелирование, является туннельный кондактанс. Как известно [24], в системах с взаимодействием туннельный кондактанс вблизи нулевого напряжения сильно подавлен. Это

– так называемая, туннельная аномалия. Туннелирование электрона в слой двумерных электронов, находящихся в сильном магнитном поле, когда заполнен только нижний уровень Ландау, рассматривалось в работах [61, 62, 63]. В случае *слабого* магнитного поля, когда фактор заполнения $\nu \gg 1$, туннелирование исследовалось в работах [64, 65, 22]. Для случая, когда магнитное поле лежит в интервале $1/\tau_{tr} \ll \omega_H \ll 1/\tau_0$, где τ_{tr} – это транспортное время рассеяния, т.е. уровни Ландау перекрываются, было найдено, что образуется щель в туннельной плотности состояний, равная

$$E_0 = \frac{\omega_H}{\nu} \ln \frac{\nu r_s}{\sqrt{2}} \propto \frac{\omega_H^2}{E_F}, \quad (1.94)$$

где E_F обозначает энергию Ферми в отсутствие магнитного поля. В этом разделе, используя метод, предложенный Левитовым и Шитовым [65], рассмотрим туннелирование электрона в слой двумерных электронов на высокий уровень Ландау, заполненный на половину. При этом в отличие от работ [64, 65, 22], будем считать, как и в предыдущих разделах, что случайный потенциал дельта-коррелированный и такой *слабый*, что уровни Ландау хорошо разделены, т.е. $\omega_H \gg 1/\tau$.

Распространение электрона после туннелирования в слой двумерных электронов удобно рассматривать в мнимом времени ζ . Эффективное действие, которое описывает динамику на больших временах, в случае нулевого напряжения $V = 0$ имеет вид [65]

$$S_0(\zeta) = 4 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{q dq}{2\pi} \frac{\sin^2 \omega \zeta}{\omega + Dq^2} \frac{U_{scr}(q)}{\omega + Dq^2 + \sigma_{xx} e^{-2} q^2 U_{scr}(q)} \quad (1.95)$$

где σ_{xx} и D обозначают проводимость и коэффициент диффузии электронной системы соответственно. Они связаны соотношением Эйнштейна $\sigma_{xx} = e^2 \rho D$. В отличие от случая, когда уровни Ландау перекрываются, при половинном заполнении проводимость и коэффициент диффузии равны [2]

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{\pi^2} N, \quad D = \frac{R_c^2}{2\tau}. \quad (1.96)$$

Сразу отметим, что так как характерное время определяется шириной уровня Ландау $1/(2\tau)$, то эффективное действие работает на временах $\zeta \gtrsim 2\tau$.

Интеграл по частоте ω в выражении (1.95) определяется малыми ω . Используя асимптотическое выражение (1.72) для эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(q)$, находим на больших временах $\zeta \gg 2\tau$, что

$$S_0(\zeta) = \frac{1}{8\pi^2\sigma_{xx}} \ln \frac{\zeta}{2\tau} \ln \frac{\zeta\gamma^4}{2\tau}, \quad (1.97)$$

где безразмерный параметр γ определен как

$$\gamma = 2\pi\sigma_{xx} \sqrt{\frac{2\tau}{D}} \exp \left(-\frac{2R_c}{a_B} \frac{1}{2\pi\sigma_{xx}} \sqrt{\frac{D}{2\tau}} \ln \left[2\pi\sigma_{xx} \sqrt{\frac{2\tau}{D}} \right] \right). \quad (1.98)$$

Отметим, что член с экспонентой в выражении для параметра γ связан с экранированием электрон-электронного взаимодействия.

С учетом работы источника напряжения, полное действие для распространяющегося заряда имеет вид

$$S(\zeta) = S_0(\zeta) - 2eV\zeta \quad (1.99)$$

Минимизируя его по времени ζ , находим оптимальное время ζ_* , которое соответствует времени аккомодации заряда,

$$\zeta_* \simeq 2\tau \frac{V_0}{V}, \quad V_0 = \frac{e}{16\pi^2\sigma_{xx}\tau}. \quad (1.100)$$

Как подчеркивалось выше, рассмотрение должно быть самосогласованным, т.е. $\zeta_* \geq 2\tau$. Отсюда следует, что напряжения должны быть на слишком высокими, $V \leq V_0$.

Подставляя выражения (1.96) для проводимости и коэффициента диффузии в соотношение (1.100) для V_0 , находим

$$eV_0 = \frac{1}{16N\tau} \propto \frac{\omega_H^{3/2}}{E_F\tau_0^{1/2}}, \quad (1.101)$$

где использована формула (1.44).

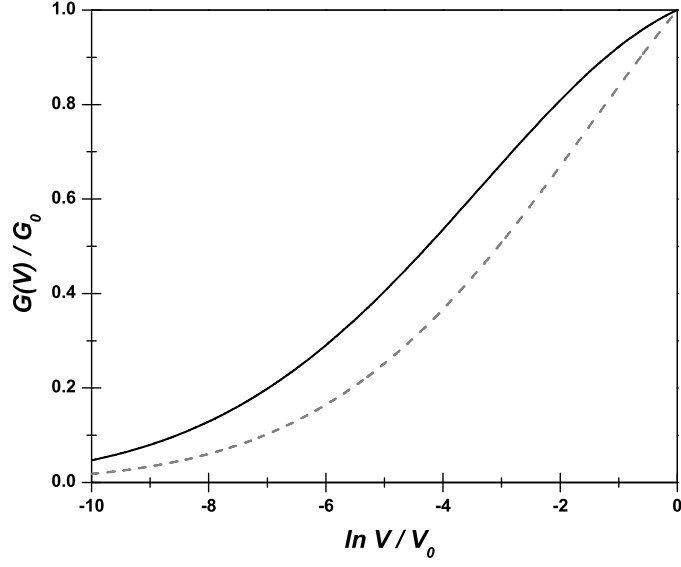


Рис. 1.6: Туннельный кондактанс $G(V)/G_0$ как функция от $\ln V/V_0$ при значениях параметров $r_s = 0.2$, $N = 5$ и $(\omega_H\tau)^{-1} = 0.2$. Сплошная линия соответствует (1.103), а прерывистая построена без учета экранирования.

Предполагая, что вклад от туннельного барьера не зависит от напряжения при малом напряжении, можно написать туннельный кондактанс в виде

$$G(V) = G_0 \exp[-S_0(\zeta_*) + 2eV\zeta_*]. \quad (1.102)$$

Откуда для зависимости туннельного кондактанса от напряжения получаем

$$G(V) = G_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\alpha(V)}, \quad \alpha(V) = \frac{1}{8N} \ln \left[\frac{V_0}{V} \gamma^4 \right]. \quad (1.103)$$

Подставляя выражения (1.96) в выражение (1.98), находим, что параметр γ равен

$$\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} N r_s \omega_H \tau \exp \left(-\frac{\pi}{\omega_H \tau} \ln \left[\frac{2\sqrt{2}}{\pi} N r_s \omega_H \tau \right] \right). \quad (1.104)$$

Наличие экранировки электрон-электронного взаимодействия приводит к появлению множителя с экспонентой в выражении (1.104) для параметра γ . Однако, заметим что этот множитель является не большой поправкой в силу условия $1/(\omega_H\tau) \ll 1$.

График зависимости туннельного кондактанса $G(V)$ как функции от напряжения V показан на Рис. 1.6. Как видно из рисунка, учет экранирования приводит к уменьшению туннельной аномалии. Это связано с тем, что экранирование ослабляет электрон-электронное взаимодействие на N -ом уровне Ландау (см. Рис. 1.2).

Энергетический масштаб eV_0 по порядку величины соответствует щели в туннельной плотности состояний. Таким образом, в рассматриваемом случае туннелирования на высокий уровень Ландау, заполненный на половину, имеется щель в туннельной плотности состояний

$$E_0 \propto \frac{\omega_H^{3/2}}{E_F \tau_0^{1/2}}, \quad (1.105)$$

которая имеет более слабую зависимость от магнитного поля, чем в случае, когда уровни Ландау перекрываются.

В заключение этого раздела отметим, что туннелирование электрона в слой двумерных электронов, находящихся в относительно слабом магнитном поле экспериментально исследовалось в работах [66, 67]. При этом образцы обладали достаточно низкой подвижностью так, что уровни Ландау перекрывались. Было найдено, что результаты эксперимента хорошо описываются туннельной плотностью состояний с пиком на энергии $E_g \approx 0.047\omega_H$ [66]. В рамках подхода, изложенного в этом разделе, туннельный кондактанс на напряжениях порядка E_g/e найти не возможно так, как это напряжение соответствует малым временам, на которых картина с медленным диффузионным распространением заряда не работает [68]. Линейная по магнитному полю псевдощель $E_g \sim r_s \omega_H$ и зависимость туннельного кондактанса от напряжения вблизи E_g/e , полученные теоретически в работах [68, 22], хорошо согласуются с результатами экспериментов [66, 67]. Для определения структуры туннельной плотности состояний под псевдощелью E_g и проверки зависимостей (1.94) и (1.105) необходимы дальнейшие экспериментальные исследования.

1.6 Заключение

В этой главе выведена эффективная теория для взаимодействующих электронов ($r_s \ll 1$) на последнем из заполненных N -ом уровне Ландау в *слабом* магнитном поле ($Nr_s \gg 1$) с учетом наличия *слабого* дельта-коррелированного случайного потенциала ($\omega_H \tau \gg 1$). Найдено эффективное взаимодействие между электронами на N -ом уровне Ландау, которое учитывает эффект экранирования затравочного кулоновского взаимодействия электронами с других уровней Ландау. В рамках этой теории вычислены поправки (по параметру $(\omega_H \tau)^{-1} \ll 1$) за счет *слабого* беспорядка к эффективному g -фактору и спектру спиновых волн. Показано, что рассеяние спиновых волн на примесях приводит к появлению конечного времени жизни этих возбуждений, для которого написана оценка снизу. Кроме этого, исследованно туннелирование электрона в слой двумерных электронов при половинном заполнении N -ого уровня Ландау.

1.7 Приложение: Поправки к термодинамическому и химическому потенциалу

В этом разделе будет проанализирован член S_μ в действии (1.56). Этот вклад появляется после интегрирования по продольным флуктуациям и равен

$$S_\mu = \frac{1}{2} \langle (S_2[\bar{\Psi}, \Psi, \delta P, \lambda])^2 \rangle_{\delta P}. \quad (1.106)$$

Можно написать, что

$$S_\mu = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3, \quad (1.107)$$

где

$$\delta S_1 = T^2 \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \left(\Psi^\dagger \hat{\lambda} \tilde{G}_0 \hat{\lambda} \Psi - \text{tr} \hat{\lambda} \tilde{G}_0 \hat{\lambda} G_0 \right), \quad (1.108)$$

$$\delta S_2 = -T^2 \int d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_4 \sum_{\omega_k \omega_n \nu_m}^{\alpha\beta} \lambda_{\nu_m}^\beta(\mathbf{r}_1) D_{\omega_n \nu_m}^{\alpha\alpha}(\omega_k; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \pi_0^{\omega_n}(\nu_m; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (1.109)$$

$$\times L_{\omega_n, \omega_n + \nu_m}^{\alpha\beta, \alpha\alpha}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4),$$

$$\delta S_3 = \frac{T^2}{2} \int d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_4 \sum_{\omega_k \omega_l \omega_m \nu_n}^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\omega_n \nu_m}^{\alpha\beta}(\omega_k; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) D_{\omega_n \nu_m}^{\gamma\delta}(\omega_l; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) L_{n, n+m}^{\alpha\beta, \gamma\delta}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4). \quad (1.110)$$

Здесь

$$D_{\omega_n \nu_m}^{\alpha\beta}(\omega_k; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\bar{\Psi}_{\omega_k}^\alpha(\mathbf{r}_1) \Psi_{\omega_n + \nu_m}^\beta(\mathbf{r}_2) - 2\delta_{k, n+m} \delta^{\alpha\beta} G_0^{\omega_n + \nu_m}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \right) \times \lambda_{\omega_n - \omega_k}^\alpha(\mathbf{r}_1) \tilde{G}_0^{\omega_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \left(\bar{\Psi}_{\omega_n}^\beta(\mathbf{r}_1) \Psi_{\omega_k}^\alpha(\mathbf{r}_2) - 2\delta_{k, n} \delta^{\alpha\beta} G_0^{\omega_n}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \right) \times \lambda_{\omega_k - \omega_n - \nu_m}^\beta(\mathbf{r}_1) \tilde{G}_0^{\omega_n + \nu_m}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (1.111)$$

и $L_{\omega_{m_1} \omega_{m_2}}^{\alpha\beta, \gamma\delta}$ обозначает функцию Грина продольных флуктуаций (1.54).

Производя интегрирование по плазмонному полю, мы находим, что

$$S_\mu \rightarrow \frac{\Delta\Omega_1 + \Delta\Omega_2 + \Delta\Omega_3}{T} + (\delta\mu_1 + \delta\mu_2 + \delta\mu_3) \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}), \quad (1.112)$$

где поправки к термодинамическому потенциалу имеют вид

$$\frac{\Delta\Omega_1}{S} = -T^2 \sum_{\omega_n \nu_m} \int d\mathbf{r} G_0^{\omega_n}(0, \mathbf{r}) \tilde{G}_0^{\omega_n + \nu_m}(\mathbf{r}, 0) U_{\text{scr}}(\nu_m, \mathbf{r}), \quad (1.113)$$

$$\frac{\Delta\Omega_2}{S} = 2T^2 \sum_{\omega_n \nu_m} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 \left(G_0^{\omega_n}(0, \mathbf{r}) \tilde{G}_0^{\omega_n + \nu_m}(\mathbf{r}, 0) + \tilde{G}_0^{\omega_n}(\mathbf{r}, 0) G_0^{\omega_n + \nu_m}(0, \mathbf{r}) \right) \times U_{\text{scr}}(\nu_m, \mathbf{r}_1) \pi_0^{\omega_n}(\nu_m, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) L_{\omega_n, \omega_n + \nu_m}^{\alpha\alpha, \alpha\alpha}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}),$$

$$\frac{\Delta\Omega_3}{S} = 2T^2 \sum_{\omega_n \nu_m} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 \left(G_0^{\omega_n}(0, \mathbf{r}) \tilde{G}_0^{\omega_n + \nu_m}(\mathbf{r}, 0) + G_0^{\omega_n + \nu_m}(0, \mathbf{r}) \tilde{G}_0^{\omega_n}(\mathbf{r}, 0) \right) \times \left(G_0^{\omega_n}(0, \mathbf{r}_1) \tilde{G}_0^{\omega_n + \nu_m}(\mathbf{r}_1, 0) + G_0^{\omega_n + \nu_m}(0, \mathbf{r}_1) \tilde{G}_0^{\omega_n}(\mathbf{r}_1, 0) \right) \times U_{\text{scr}}(\nu_m, \mathbf{r}_2) L_{\omega_n, \omega_n + \nu_m}^{\alpha\alpha, \alpha\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2).$$

Эти поправки малы по параметру $1/N$ по сравнению с вкладом, определяемым уравнением (1.66).

Поправки к химическому потенциалу равны

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mu_1}{2\pi l_H^2} &= T \sum_m \int d\mathbf{r} P_N(0, \mathbf{r}) \tilde{G}_0^{\omega_m}(\mathbf{r}, 0) U_{\text{scr}}(\nu_m, \mathbf{r}), \\
\frac{\delta\mu_2}{2\pi l_H^2} &= -4T \sum_m \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 P_N(0, \mathbf{r}) \tilde{G}_0^{\omega_m}(\mathbf{r}, 0) U_{\text{scr}}(\nu_m, \mathbf{r}_1) \pi_0^0(\nu_m, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\
&\quad \times L_{0, \omega_m}^{\alpha\alpha, \alpha\alpha}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}), \\
\frac{\delta\mu_3}{2\pi l_H^2} &= -8T^2 \sum_m \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 P_N(0, \mathbf{r}) \tilde{G}_0^{\omega_m}(\mathbf{r}, 0) U_{\text{scr}}(\nu_m, \mathbf{r}_1) L_{0, \omega_m}^{\alpha\alpha, \alpha\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \\
&\quad \times \left(G_0^0(0, \mathbf{r}_1) \tilde{G}_0^{\omega_m}(\mathbf{r}_1, 0) + G_0^{\omega_m}(0, \mathbf{r}_1) \tilde{G}_0^0(\mathbf{r}_1, 0) \right).
\end{aligned} \tag{1.114}$$

Вторая и третья поправки малы по параметру $1/N$ по сравнению с первой, поэтому при $N \gg 1$ поправка к химическому потенциалу $\delta\mu$ определяется только вкладом $\delta\mu_1$.

1.8 Приложение: Вычисление поляризационного оператора

Вычисление поляризационного оператора $\Pi(\nu_n, q)$ сильно упрощается в пределе $\omega_H \tau \gg 1$. Тогда

$$\Pi(\nu_n, q) = T \sum_{\omega_m} \pi^{\omega_m}(\nu_n, q). \tag{1.115}$$

Вычисление $\Pi(\nu_n, q)$ аналогично вычислению, представленному в работе [20]. Будем рассматривать волновые вектора с $q \ll R_c/l_H^2$. Используя уравнение (1.61), получаем, что

$$\Pi(\zeta_n, Q) = \frac{2m}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathcal{J}_j^2(Q)}{j^2 + \zeta_n^2} \left[j^2 - \frac{1}{\pi\tau\omega_H} \mathcal{L}_j(\zeta_n) \right], \tag{1.116}$$

где

$$\mathcal{L}_j(\zeta_n) = \frac{j^2(j^2 + 3\zeta_n^2)}{\zeta_n^2(j^2 + \zeta_n^2)} \ln \frac{\sinh \pi\zeta_n}{\pi\zeta_n} + 4 \frac{j\zeta_n}{j^2 + \zeta_n^2} \arctan \frac{\zeta_n}{j} + \frac{j^2 - \zeta_n^2}{j^2 + \zeta_n^2} \ln(1 + 2\tau\omega_H\zeta_n). \tag{1.117}$$

Здесь $\zeta_n = \nu_n/\omega_H$ и $Q = qR_c$. Преобразование ряда (1.116) в интеграл с помощью соотношения

$$\mathcal{J}_j^2(x) = \int_0^\pi \frac{dy}{\pi} \cos(jy) \mathcal{J}_0\left(2x \sin \frac{y}{2}\right) \quad (1.118)$$

позволяет определить асимптотическую форму поляризационного оператора $\Pi(\nu_n, q)$.

В статическом пределе $|\zeta_n| \ll 1$

$$\Pi(\zeta_n, Q) = \frac{m}{\pi} \left(\left(1 - \frac{\pi}{6\tau\omega_H}\right) (1 - \mathcal{J}_0^2(Q)) + \frac{\ln(1 + 2\omega_H\tau\zeta_n)}{2\pi\omega_H\tau} \xi(Q) + \mathcal{O}(\zeta_n^2) \right), \quad (1.119)$$

Здесь функция $\xi(x)$ определена как

$$\xi(x) = \int_0^\pi \frac{dy}{\pi} \mathcal{J}_0\left(2x \sin \frac{y}{2}\right) \left[(y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \quad (1.120)$$

и имеет следующие асимптотики

$$\xi(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \ll 1, \\ \frac{\pi}{3x} (2 - \sin 2x) & , \quad x \gg 1. \end{cases} \quad (1.121)$$

В гидродинамическом пределе $qR_c \ll 1$, оставляя только первый член ряда (1.116), находим

$$\Pi(\zeta_n, Q) = \frac{m}{2\pi} \frac{Q^2}{1 + \zeta_n^2} \left[1 - \frac{1}{\pi\tau\omega_H} \mathcal{L}_1(\zeta_n) \right]. \quad (1.122)$$

1.9 Приложение: Вычисление поправок к термодинамическому и химическому потенциалу

1.9.1 Термодинамический потенциал

Удобно разделить поправку к термодинамическому потенциалу (1.66) на обменную и корреляционную

$$\Delta\Omega = \Delta\Omega_{\text{ex}} + \Delta\Omega_{\text{cor}}, \quad (1.123)$$

$$\frac{\Delta\Omega_{\text{ex}}}{S} = \frac{T}{2} \sum_{\nu_n} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} U_0(q) \Pi(\nu_n, q), \quad (1.124)$$

$$\frac{\Delta\Omega_{\text{cor}}}{S} = -\frac{T}{2} \sum_{\nu_n} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha U_0^2(q) \Pi^2(\nu_n, q)}{1 + \alpha U_0(q) \Pi(\nu_n, q)}. \quad (1.125)$$

Обменная часть дает главный вклад [20] и может быть записана как

$$\frac{\Delta\Omega_{\text{ex}}}{S} = -\frac{e^2}{2\pi l^3} \sum_{m \neq N} \int_0^\infty dx e^{-\frac{x^2}{2}} L_N^1\left(\frac{x^2}{2}\right) L_m\left(\frac{x^2}{2}\right) \left(\Theta(N - m) + \frac{1}{\pi\omega_H\tau} \frac{1}{m - N} \right), \quad (1.126)$$

где $L_n^m(x)$ обозначает обобщенный полином Лагерра. В случае $N \gg 1$ это выражение переходит в (1.77).

1.9.2 Химический потенциал

Используя уравнение (1.68), удобно разделить поправку к химическому потенциалу на обменную и корреляционную

$$\delta\mu = \delta\mu_{\text{ex}} + \delta\mu_{\text{cor}}, \quad (1.127)$$

где

$$\delta\mu_{\text{ex}} = 2\pi l_H^2 T \sum_n \int d\mathbf{r} U_0(\mathbf{r}) P_N(0, \mathbf{r}) \tilde{G}_0^{\omega_n}(\mathbf{r}, 0), \quad (1.128)$$

$$\delta\mu_{\text{cor}} = -2\pi l_H^2 T \sum_n \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} P_N(q l_H^2) \tilde{G}_0^{\omega_n}(q) \frac{U_0^2(q) \Pi(\nu_n, q)}{1 + U_0(q) \Pi(\nu_n, q)}. \quad (1.129)$$

Обменная часть дает главный вклад [20] и может быть записана как

$$\delta\mu_{\text{ex}} = -\frac{e^2}{l_H} \sum_{m \neq N} \int_0^\infty dx e^{-\frac{x^2}{2}} L_N\left(\frac{x^2}{2}\right) L_m\left(\frac{x^2}{2}\right) \left(\Theta(N - m) + \frac{1}{2\pi\omega_H\tau} \frac{1}{m - N} \right). \quad (1.130)$$

Вычисляя это выражение в случае $N \gg 1$ получаем

$$\delta\mu_{\text{ex}} = \frac{2e^2}{\pi l_H^2} (2N)^{1/2} \left[1 - \frac{\ln N}{8N} + \frac{1}{4\pi\omega_H\tau} \frac{1}{2N} \left(\int_1^\infty \frac{dt}{t} \ln(1 - e^{-t}) \right. \right. \quad (1.131)$$

$$\left. \left. + \int_0^1 \frac{dt}{t} \ln \frac{1 - e^{-t}}{t} - \frac{\pi^2}{3} \right) \right].$$

Глава 2

Фазовая диаграмма двумерных неупорядоченных электронов в слабом магнитном поле

2.1 Введение

Как было показано в предыдущей главе взаимодействующий двумерный электронный газ в *слабом* магнитном поле может описываться с помощью электронов на последнем из заполненных уровне Ландау, но с экранированным взаимодействием (1.64). Используя результат Алейнера и Глазмана [20], Кулаков, Фоглер и Шкловский, работая в приближении Хартри-Фока, предсказали существование однонаправленной волны зарядовой плотности на полузаполненном высоком уровне Ландау при нулевой температуре и в отсутствие примесей [21]. Моэсснер и Чалкер [23], обобщив работу [69] на случай частично заполненного высокого уровня Ландау, показали, что состояние однонаправленной волны зарядовой плотности при половинном заполнении уровня существует ниже некоторой температуры T_0 , масштаб которой определяется экранированным взаимодействием. Недавно открытое явление сильной анизотропии в магнетосопротивлении на высоких уровнях Ландау вблизи половинного

заполнения при низких температурах было связано с образованием состояния однонаправленной волны зарядовой плотности [11, 12]. Как будет показано в следующей главе, действительно в состоянии однонаправленной волны зарядовой плотности магнетопроводимость анизотропна.

В отсутствие случайного потенциала, состояние волны зарядовой плотности сильно ниже точки перехода представляет собой чередование областей с фактором заполнения отличающимся на единицу [17]. Возможная фазовая диаграмма при нулевой температуре обсуждалась в работе [75]. В этой ситуации состояние волны зарядовой плотности может описываться с помощью феноменологической теории для упругих деформаций границ этих областей [70, 71, 72, 73, 74]. Недавно были предприняты попытки вывести такую теорию из микроскопической теории, стартуя с решения в приближении среднего поля [76, 77]. Влияние примесей на состояние однонаправленной волны зарядовой плотности было исследовано в рамках подхода теории упругости [78]. Были найдены различные режимы, которые зависят от силы беспорядка. Однако основная трудность данного подхода состоит в нахождении параметров феноменологической теории, для чего должна быть разработана законченная последовательная микроскопическая теория .

В настоящее время последовательный микроскопический анализ влияния примесей на переход из однородного состояния в состояние волны зарядовой плотности, также как на фазовую диаграмму, отсутствует¹. В этой главе эти вопросы будут исследованы в рамках приближения среднего поля (Хатри-Фока). Сразу отметим, что в рассматриваемом случае большого числа занятых уровней Ландау, приближение среднего поля оправдано, так как флуктуации параметра порядка приводят к малым поправкам. Ясно, что

¹В работе [79] изучалось влияние примесей на переход в состояние однонаправленной волны зарядовой плотности при половинном заполнении. Численно было найдено подавление примесями температуры перехода, но никаких аналитических результатов получено не было.

флуктуации параметра порядка наиболее выражены в непосредственной близости от фазового перехода. Однако оказывается, что критическая область параметрически мала и это не приводит к никакой существенной неопределенности для температуры перехода.

Будем предполагать, что примеси создают слабую неупорядоченность в системе, т.е. примесное уширение уровня Ландау $1/(2\tau)$ оказывается много меньше расстояния между ними, т.е. $1/(2\tau) \ll \omega_H$. Этот случай реализуется в современных экспериментальных образцах, обладающих высокой подвижностью, которые используются для изучения анизотропии магнитосопротивления [11, 12, 13, 14]. Заметим однако, что обычно величина $T_0 \sim 1/\tau$, и поэтому можно ожидать заметного влияния примесей на свойства состояний волны зарядовой плотности на высоком уровне Ландау даже при малом уширении уровня $1/(2\tau) \ll \omega_H$.

Одним из основных результатов этой главы является тот факт, что при нулевой температуре состояние волны зарядовой плотности разрушается, если уширение уровня Ландау превосходит критическое значение $1/(2\tau_c) = 4T_0/\pi$. При ненулевой температуре примеси понижают температуру перехода в состояние волны зарядовой плотности по сравнению с чистым случаем, что согласуется с численными результатами работы [79]. Физически причина этого явления состоит в том, что рассеяние на примесях разрушает корреляции между электронами, и поэтому приводит в конце концов к разрушению состояния волны зарядовой плотности. Это похоже на подавление критической температуры в обычных сверхпроводниках магнитными примесями [80] и в необычных сверхпроводниках немагнитными примесями [81].

В этой главе будет вычислена свободная энергия состояния волны зарядовой плотности в приближении среднего поля (раздел 2.2). В разделе 2.3 исследуется фазовая диаграмма системы. Поправки к приближению среднего

поля рассматриваются в разделе 2.4. В разделе 2.5 проводится сравнение с экспериментальными и численными данными.

2.2 Свободная энергия состояния волны зарядовой плотности

2.2.1 Введение

Рассмотрим двумерные взаимодействующие электроны с примесями в поперечном магнитном поле. Будем считать, что все условия, обсуждавшиеся в разделе 1.2.1 выполнены. Также будем предполагать, что выполняется условие

$$Nr_s^2 \gg 1. \quad (2.1)$$

В этом случае, как было показано в работе [23], оправдано приближение Хартри-Фока, т.к. поправки к нему порядка $a_B/l_H = 1/Nr_s^2 \ll 1$. Как и выше считаем, что электронные спины поляризованы магнитным полем [32, 56]. Будем рассматривать случай, когда примесное уширение уровня Ландау $1/2\tau \ll \Delta_{\text{ex}} = (r_s\omega_H/\pi\sqrt{2}) \ln 2\sqrt{2}/r_s$, т.е. уровни Ландау с различным направлением спина электронов хорошо разделены.

Для того, чтобы изучить переход из однородного состояния в состояние волны зарядовой плотности, выведем разложение свободной энергии по параметру порядка $\Delta(\mathbf{q}_j)$, где векторы $\mathbf{q}_j$, характеризующие состояние волны зарядовой плотности, имеют одну и ту же длину [69],

$$q_j = Q. \quad (2.2)$$

Ниже будет получено разложение свободной энергии до четвертой степени параметра порядка.

Термодинамический потенциал двумерных взаимодействующих спин-поляризованных электронов на N -ом уровне Ландау в присутствии

случайного потенциала $V_{\text{dis}}(\mathbf{r})$, согласно результатам предыдущей главы, может быть записан как

$$\Omega = -\frac{T}{N_r} \int \mathcal{D}[\bar{\psi}, \psi] \int \mathcal{D}[V_{\text{dis}}] \mathcal{P}[V_{\text{dis}}] \exp \mathcal{S}[\bar{\psi}, \psi, V_{\text{dis}}], \quad (2.3)$$

где действие $\mathcal{S}[\bar{\psi}, \psi, V_{\text{dis}}]$ в матцубаровском представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d\mathbf{r} \sum_{\omega_n}^{\alpha} \bar{\psi}_{\omega_n}^{\alpha}(\mathbf{r}) \left[i\omega_n + \mu - \mathcal{H}_0 - V_{\text{dis}}(\mathbf{r}) \right] \psi_{\omega_n}^{\alpha}(\mathbf{r}) - \frac{T}{2} \sum_{\omega_n, \omega_m, \nu_l} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \bar{\psi}_{\omega_n}^{\alpha}(\mathbf{r}) \\ \times \psi_{\omega_n - \nu_l}^{\alpha}(\mathbf{r}) U_{\text{scr}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bar{\psi}_{\omega_m}^{\alpha}(\mathbf{r}') \psi_{\omega_m + \nu_l}^{\alpha}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\psi_{\omega_n}^{\alpha}(\mathbf{r})$ и $\bar{\psi}_{\omega_n}^{\alpha}(\mathbf{r})$ операторы уничтожения и рождения электронов на N -ом уровне Ландау². Напомним, что T обозначает температуру, μ химический потенциал, $\omega_n = \pi T(2n + 1)$ матцубаровскую фермионную частоту, а $\nu_n = 2\pi Tn$ бозонную. Также напомним, что гамильтониан $\mathcal{H}_0$ для свободных двумерных электронов в поперечном магнитном поле $H = \epsilon_{ab} \partial_a A_b$ имеет вид

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m} (-i\nabla - e\mathbf{A})^2 \quad (2.5)$$

Эффективное взаимодействие электронов на N -ом уровне Ландау, учитывающее взаимодействие с электронами на других уровнях, было выведено в предыдущей главе (см. (2.6)). Для удобства приведем его снова

$$U_{\text{scr}}(q) = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon q} \frac{1}{1 + \frac{2}{qa_B} \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H \tau} \right) (1 - \mathcal{J}_0^2(qR_c))}, \quad (2.6)$$

Напомним, что эффективное взаимодействие (2.6) спадает на расстояниях порядка a_B (см. Рис. 1.1). В дальнейшем будем пренебрегать членом $\pi/(6\omega_H \tau)$, имея ввиду случай $\omega_H \tau \gg 1$.

Как и в предыдущей главе, для простоты будем предполагать, что случайный потенциал дельта-коррелированный, т.е. функция распределения имеет вид

$$\mathcal{P}[V_{\text{dis}}(\mathbf{r})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \exp \left(-\frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} V_{\text{dis}}^2(\mathbf{r}) \right). \quad (2.7)$$

²В этой главе не будем писать индекс N , так как рассматриваются электроны только на N -ом уровне Ландау.

Для усреднения по беспорядку будем как и ранее использовать метод реплик [48].

2.2.2 Приближение Хартри-Фока

Состояние волны зарядовой плотности характеризуется параметром порядка $\Delta(\mathbf{q})$, который связан с изменением электронной плотности как

$$\langle \delta\rho(\mathbf{q}) \rangle = Sn_L F_N(q) \Delta(\mathbf{q}). \quad (2.8)$$

Напомним, что S – это площадь слоя двумерных электронов, а форм-фактор $F_N(q)$ определен как

$$F_N(q) = L_N \left(\frac{q^2 l_H^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{q^2 l_H^2}{4} \right). \quad (2.9)$$

В рассматриваемом случае $N \gg 1$, можно пользоваться следующим асимптотическим выражением для форм-фактора

$$F_N(q) = \mathcal{J}_0(qR_c), \quad qR_c \ll \frac{R_c^2}{l_H^2} = \nu. \quad (2.10)$$

После расщепления члена с взаимодействием в действии (2.4) в приближении Хартри-Фока (см. работу [69]) получаем

$$\mathcal{S} = -\frac{N_r \Omega_\Delta}{T} + \int d\mathbf{r} \sum_{\omega_n}^{\alpha} \overline{\psi_{\omega_n}^{\alpha}}(\mathbf{r}) \left[i\omega_n + \mu - \mathcal{H}_0 - V_{\text{dis}}(\mathbf{r}) + \lambda(\mathbf{r}) \right] \psi_{\omega_n}^{\alpha}(\mathbf{r}), \quad (2.11)$$

причем

$$\Omega_\Delta = \frac{n_L S^2}{2} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} U(q) \Delta(\mathbf{q}) \Delta(-\mathbf{q}). \quad (2.12)$$

Отметим, что в выражении (2.11) опущен член, связанный с наличием в средней электронной плотности $\langle \delta\rho(\mathbf{r}) \rangle$ электронной плотности ρ_e однородного состояния, который дает независимый от $\Delta(\mathbf{q})$ вклад в термодинамический потенциал [69, 44].

Потенциал $\lambda(\mathbf{r})$ в выражении (2.11) возникает как следствие возмущения однородного распределения электронной плотности волной зарядовой плотности и связан с параметром порядка следующим образом

$$\lambda(\mathbf{q}) = SU(q) F_N^{-1}(q) \Delta(\mathbf{q}), \quad (2.13)$$

где $U(q) = -n_L U_{HF}(q)$, а потенциал Хартри-Фока определен как

$$U_{HF}(q) = U_{scr}(q) F_N^2(q) - \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2 n_L} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{p}l_H^2} U_{scr}(\mathbf{p}) F_N^2(\mathbf{p}). \quad (2.14)$$

2.2.3 Усреднение по случайному потенциалу

После усреднения по случайному потенциалу $V_{dis}(\mathbf{r})$ действие (2.11) принимает вид (см. раздел 1.2.3)

$$\mathcal{S} = -\frac{N_r \Omega_\Delta}{T} - \frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} Q^2 + \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) (i\omega + \mu - \mathcal{H}_0 + \lambda + iQ) \psi(\mathbf{r}), \quad (2.15)$$

где новое поле $Q(\mathbf{r})$, как и ранее, представляет собой матрицу в матрицборовском и репличном пространствах.

Напомним, что действие (2.15) при нулевой температуре, т.е. при $\omega_n \rightarrow 0$, и в отсутствие потенциала $\lambda(\mathbf{r})$ имеет перевальное решение

$$Q_{sp} = V^{-1} P_{sp} V, \quad (P_{sp})_{nm}^{\alpha\beta} = P_{sp}^n \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta}, \quad (2.16)$$

где V – глобальное унитарное вращение, а P_{sp}^n подчиняется уравнению

$$P_{sp}^n = ig G_0^{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (2.17)$$

Как и в главе 1, функция Грина $G_0^{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ определена как

$$G_0^n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_k \phi_{Nk}^*(\mathbf{r}) G_0(\omega_n) \phi_{Nk}(\mathbf{r}'), \quad G_0(\omega_n) = [i\omega_n + \mu - \epsilon_N + iP_{sp}^n]^{-1}. \quad (2.18)$$

В случае *слабого* беспорядка решение уравнения (2.17) имеет вид (см. раздел 1.2.3)

$$P_{sp}^n = \frac{\operatorname{sgn} \omega_n}{2\tau}, \quad \frac{1}{2\tau} = \sqrt{gn_L}. \quad (2.19)$$

Разделяя матричное поле $Q(\mathbf{r})$ на продольную $P(\mathbf{r})$ и поперечную части $V(\mathbf{r})$,

$$Q(\mathbf{r}) = V^{-1}(\mathbf{r}) P(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}), \quad (2.20)$$

будем пренебрегать последней, как это делалось в предыдущей главе.

Наличие потенциала $\lambda(\mathbf{r})$ приводит к сдвигу перевального решения (2.19) из-за взаимодействия с ним флуктуаций $\delta P = P - P_{\text{sp}}$ поля P . Соответствующее действие для δP получается из уравнения (2.12) после интегрирования по фермионам

$$\mathcal{S} = \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} \ln G_0^{-1} - \frac{N_r \Omega_\Delta}{T} - \frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} (P_{\text{sp}} + \delta P)^2 + \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} \ln [1 + (i\delta P + \lambda)G_0]. \quad (2.21)$$

В результате термодинамический потенциал выражается через функциональный интеграл по полям δP ,

$$\Omega = -\frac{T}{N_r} \ln \int \mathcal{D}[\delta P] I[\delta P] \exp \mathcal{S} \quad (2.22)$$

где мера интегрирования $I[\delta P]$ по полям δP определена в (1.55).

Квадратичная по δP часть действия (2.21) вместе с мерой $\ln I[\delta P]$, определяет функцию Грина для поля δP (см. раздел 1.2.6)

$$\langle \delta P_{m_1 m_2}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) \delta P_{m_3 m_4}^{\gamma\delta}(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{g \delta_{m_1 m_4} \delta_{m_2 m_3} \Theta(m_1 m_3) \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma}}{1 + g \pi_0^{\omega_{m_1}}(\omega_{m_3} - \omega_{m_1}, q)} - \frac{2 [1 - \Theta(m_1 m_3)]}{(\pi\rho)^2} \quad (2.23)$$

$$\times \frac{g \delta_{m_1 m_2} \delta^{\alpha\beta}}{1 + g \pi_0^{\omega_{m_1}}(0, q)} \frac{g \delta_{m_3 m_4} \delta^{\delta\gamma}}{1 + g \pi_0^{\omega_{m_3}}(0, q)},$$

где поляризационный оператор теперь содержит только функции Грина на N -ом уровне Ландау

$$\pi_0^{\omega_m}(\nu_n, q) = -n_L G_0(\omega_m + \nu_n) G_0(\omega_m) F_N^2(q). \quad (2.24)$$

2.2.4 Термодинамический потенциал

Для того, чтобы найти разложение термодинамического потенциала Ω по степеням параметра порядка $\Delta(\mathbf{r})$, удобно ввести новую переменную интегрирования

$$\widetilde{\delta P} = \delta P + i\lambda \quad (2.25)$$

в функциональном интеграле и раскладывать $\text{tr} \ln$ в действии (2.21) по степеням этого нового поля $\widetilde{\delta P}$. Тогда для термодинамического потенциала находим

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_\Delta + \delta\Omega. \quad (2.26)$$

Здесь

$$\Omega_0(\mu) = \int d\mathbf{r} \text{tr} \ln G_0^{-1} - \frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} \text{tr} P_{\text{sp}}^2 \quad (2.27)$$

это термодинамический потенциал однородного состояния, а

$$\delta\Omega = -\frac{T}{N_r} \ln \int \mathcal{D}[\widetilde{\delta P}] \exp \tilde{\mathcal{S}}[\widetilde{\delta P}, \lambda] \quad (2.28)$$

учитывает флуктуации поля $\widetilde{\delta P}$ и их взаимодействие с потенциалом λ . Действие $\tilde{\mathcal{S}}[\widetilde{\delta P}, \lambda]$ имеет вид

$$\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}^{(2)}[\lambda] + \mathcal{S}_{\text{int}}[\widetilde{\delta P}, \lambda] + \mathcal{S}^{(2)}[\widetilde{\delta P}] + \sum_{s=3}^{\infty} \mathcal{S}^{(s)}[\widetilde{\delta P}], \quad (2.29)$$

где

$$\mathcal{S}^{(2)}[\lambda] = \frac{N_r}{2g} \sum_{\omega_n} \int d\mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) \lambda(\mathbf{r}), \quad (2.30)$$

$$\mathcal{S}_{\text{int}}[\widetilde{\delta P}, \lambda] = -\frac{i}{g} \int d\mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) \text{tr} \widetilde{\delta P}(\mathbf{r}), \quad (2.31)$$

и

$$\mathcal{S}^{(s)}[\widetilde{\delta P}] = \frac{(-i)^s}{s} \text{tr} \prod_{j=1}^s \int d\mathbf{r}_j \widetilde{\delta P}(\mathbf{r}_j) G_0(\mathbf{r}_j \mathbf{r}_{j+1}), \quad (2.32)$$

причем $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_1$. Отметим, что члены в действии (2.29), которые пропорциональны N_r^2 , опущены, так как они не дают вклад в $\delta\Omega$ в пределе $N_r \rightarrow 0$. Также подчеркнем, что функция Грина для поля $\widetilde{\delta P}$ совпадает с функцией Грина для поля δP .

Используя уравнения (2.28)-(2.32) мы можем написать

$$\delta\Omega = -\frac{T}{2g} \sum_{\omega_n} \int d\mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) \lambda(\mathbf{r}) - \frac{T}{N_r} \ln \left\langle \exp \tilde{\mathcal{S}}_{\text{int}} \right\rangle, \quad (2.33)$$

где $\langle \dots \rangle$ обозначает среднее по отношению к действию $\tilde{\mathcal{S}}[\widetilde{\delta P}, 0]$. Уравнение (2.33) позволяет найти разложение термодинамического потенциала в ряд

по параметру порядка $\Delta(\mathbf{q}) = F_N(q)U(q)^{-1}\lambda(\mathbf{q})S^{-1}$. В дальнейшем мы ограничимся разложением до четвертого порядка. Это подразумевает, что мы работаем около перехода из однородного состояния в состояние волны зарядовой плотности, где параметр порядка мал и разложение по нему оправдано. Еще раз подчеркнем, что хотя в критической области флуктуации параметра порядка становятся большими, сама эта область узка (см. Раз. 2.4).

Вклад второго порядка

Вклад второго порядка по параметру порядка в термодинамический потенциал $\delta\Omega$ определяется как

$$\delta\Omega^{(2)} = -\frac{T}{2g} \sum_{\omega_n} \int d\mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) \lambda(\mathbf{r}) - \frac{T}{2N_r} \langle S_{\text{int}}^2 \rangle_0, \quad (2.34)$$

где $\langle \dots \rangle_0$ обозначает усреднение по отношению к действию $\tilde{\mathcal{S}}^{(2)}[\widetilde{\delta P}]$. Подчеркнем, что замена усреднения с действием $\tilde{\mathcal{S}}[\widetilde{\delta P}, 0]$ на усреднение только с его квадратичной частью $\tilde{\mathcal{S}}^{(2)}[\widetilde{\delta P}]$ возможно, так как старшие по полю $\widetilde{\delta P}$ члены приводят к членам пропорциональным более высоким степеням N_r , а потому обращающимся в нуль в пределе $N_r \rightarrow 0$.

Используя уравнения (2.13), (2.23), и (2.31), находим, что

$$\frac{\delta\Omega^{(2)}}{S^2} = n_L \frac{T}{2} \sum_{\omega_n} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{U^2(q)G_0^2(\omega_n)}{1 + g\pi_0^{\omega_n}(0, q)} \Delta(\mathbf{q})\Delta(-\mathbf{q}). \quad (2.35)$$

Диаграмма, соответствующая этому вкладу в стандартной “крестовой” технике показана на Рис. 2.1(a).

Вклад третьего порядка

Вклад третьего порядка по параметру порядка в термодинамический потенциал $\delta\Omega^{(3)}$ определяется выражением

$$\delta\Omega^{(3)} = -\frac{T}{3!N_r} \langle S_{\text{int}}^3 \rangle_{\widetilde{\delta P}}^{(c)} = -\frac{T}{3!N_r} \left\langle S_{\text{int}}^3 S^{(3)} \right\rangle_0^{(c)}, \quad (2.36)$$

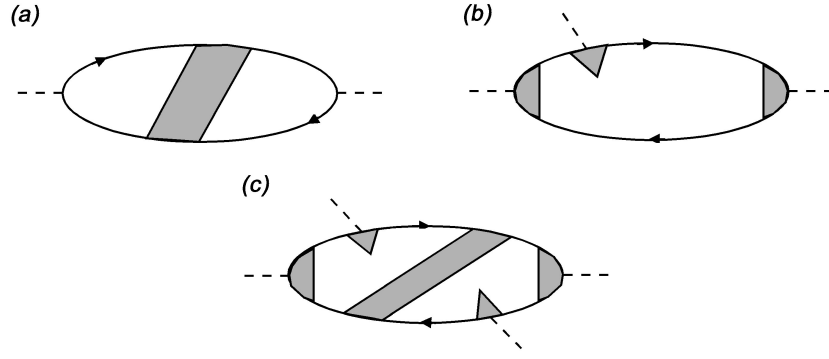


Рис. 2.1: Диаграммы для термодинамического потенциала. Сплошные линии обозначают функции Грина, прерывистые линии – это потенциал $\lambda(\mathbf{r})$ и заштрихованные блоки – это лестница из примесных линий.

где верхний индекс (c) обозначает, что необходимо учитывать только связанные диаграммы. Опять члены обращающиеся в нуль в пределе $N_r \rightarrow 0$ опущены. Используя уравнения (2.13), (2.23), (2.31), и (2.32), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Omega^{(3)}}{S^3} &= (2\pi)^2 n_L \frac{T}{3} \sum_{\omega_n} \prod_{j=1}^3 \left[\int \frac{d\mathbf{q}_j}{(2\pi)^2} \frac{U(q_j) \Delta(\mathbf{q}_j) G_0(\omega_n)}{1 + g\pi_0^{\omega_n}(0, q_j)} \right] \\ &\times \exp \frac{i}{2} (q_1^x q_2^y - q_1^y q_2^x) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Вклад $\delta\Omega^{(3)}$ соответствует диаграмме на Рис. 2.1(b).

Вклад четвертого порядка в термодинамический потенциал

Вклад четвертого порядка по параметру порядка в термодинамический потенциал $\delta\Omega^{(4)}$ определяется выражением

$$\delta\Omega^{(4)} = -\frac{T}{4!N_r} \langle S_{\text{int}}^4 \rangle^{(c)} = -\frac{T}{4!N_r} \left\langle S_{\text{int}}^4 \left[S^{(4)} + \frac{1}{2} (S^{(3)})^2 \right] \right\rangle_0^{(c)}, \quad (2.38)$$

где опять члены обращающиеся в нуль в пределе $N_r \rightarrow 0$ опущены. Используя уравнения (2.13), (2.23), (2.31), и (2.32), находим

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Omega^{(4)}}{S^4} = (2\pi)^2 n_L \frac{T}{4} \sum_{\omega_n} \prod_{j=1}^4 \left[\int \frac{d\mathbf{q}_j}{(2\pi)^2} \frac{U(q_j) \Delta(\mathbf{q}_j) G_0(\omega_n)}{1 + g\pi_0^{\omega_n}(0, q_j)} \right] \frac{1 - g\pi_0^{\omega_n}(0, |\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|)}{1 + g\pi_0^{\omega_n}(0, |\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|)} \\ \times \exp \frac{i}{2} (q_1^x q_2^y - q_1^y q_2^x) \exp \frac{i}{2} (q_3^x q_4^y - q_3^y q_4^x) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Вклад $\delta\Omega^{(4)}$ соответствует диаграмме на Рис. 2.1(с).

2.2.5 Свободная энергия

Свободная энергия состояния волны зарядовой плотности может быть записана через термодинамический потенциал как

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \Omega(\mu) - \Omega_0(\mu_0) + (\mu - \mu_0)N_e, \quad (2.40)$$

где $\mathcal{F}_0$ – это свободная энергия однородного состояния, N_e – полное число электронов, μ и μ_0 химические потенциалы в состоянии волны зарядовой плотности и в однородном состоянии соответственно.

Для того, чтобы найти разложение свободной энергии до четвертого порядка по параметру порядка, необходимо разложить $\Omega_0(\mu_0)$ вблизи точки μ до второго порядка по отклонению $\mu - \mu_0$. Это дает

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \Omega(\mu) - \Omega_0(\mu) - \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)^2 \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial^2 \mu_0}. \quad (2.41)$$

Разность химических потенциалов $\mu - \mu_0$ равна [83]

$$\mu - \mu_0 = \frac{\partial(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)}{\partial N_e} = \frac{\partial \delta\Omega}{\partial N_e} = \frac{\partial \delta\Omega}{\partial \mu} \left(\frac{\partial N_e}{\partial \mu} \right)^{-1}, \quad (2.42)$$

и из уравнения (2.26) находим

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \Omega_\Delta + \delta\Omega + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta\Omega^{(2)}}{\partial \mu} \right)^2 \left(\frac{\partial N_e}{\partial \mu} \right)^{-1}. \quad (2.43)$$

Используя выражение (2.35) для $\delta\Omega^{(2)}$, получаем

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \Omega_\Delta + \delta\Omega + \frac{n_L S^3}{2} \left[T \sum_{\omega_n} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{U^2(q) G_0^3(\omega_n)}{[1 + g\pi_0^{\omega_n}(0, q)]^2} \Delta(\mathbf{q}) \Delta(-\mathbf{q}) \right]^2 \times \left[T \sum_{\omega_n} G_0^2(\omega_n) \right]^{-1}. \quad (2.44)$$

2.2.6 Свободная энергия состояний волны зарядовой плотности

Состояние треугольной волны зарядовой плотности

Параметр порядка для волны зарядовой плотности с треугольной симметрией имеет вид [69]

$$\Delta(\mathbf{q}) = \frac{(2\pi)^2}{S} \Delta(Q) \sum_{j=1}^3 \left[\delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}_j) + \delta(\mathbf{q} + \mathbf{Q}_j) \right], \quad (2.45)$$

где вектора $\mathbf{Q}_j$ направлены под углом $2\pi/3$ друг к другу и вместе образуют равносторонний треугольник

$$\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 = 0. \quad (2.46)$$

Используя уравнения (2.35), (2.37), (2.39) и (2.44), получаем следующее выражение для свободной энергии состояния треугольной волны зарядовой плотности

$$\mathcal{F}^t = \mathcal{F}_0 + 4Sn_L T_0(Q) \left[a_2 \Delta^2 + a_3 \Delta^3 + a_4 \Delta^4 \right]. \quad (2.47)$$

Здесь коэффициент a_2 разложения Ландау имеет вид

$$a_2 = 3 \left[1 - \frac{T_0(Q)}{\pi^2 T} \sum_n \frac{1}{\xi_n^2 + \gamma^2(Q)} \right], \quad (2.48)$$

где

$$\xi_n = n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau} - i \frac{\mu_N}{2\pi T}, \quad \gamma(Q) = \frac{F_N(Q)}{4\pi T\tau} \quad (2.49)$$

причем химический потенциал отсчитывается от положения N -ого уровня, $\mu_N = \mu - \epsilon_N$. Величина

$$T_0(Q) = U(Q)/4, \quad (2.50)$$

а коэффициенты a_3 и a_4 равны

$$a_3 = i 8 \frac{T_0^2(Q)}{\pi^3 T^2} \cos \left(\frac{\sqrt{3} Q^2 l_H^2}{4} \right) \sum_n \frac{\xi_n^3}{\left[\xi_n^2 + \gamma^2(Q) \right]^3} \quad (2.51)$$

и

$$a_4 = \frac{24 T_0^3(Q)}{\pi^4 T^3} \left\{ \frac{1}{2} \sum_n \frac{\xi_n^4}{\left[\xi_n^2 + \gamma^2(Q) \right]^4} \left[\left(1 + \cos \frac{\sqrt{3} Q^2 l_H^2}{2} \right) \left(D_n(Q) + D_n(\sqrt{3} Q) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 3 D_n(0) + \frac{1}{2} D_n(2Q) \right] + 3 \left[\sum_n \frac{\xi_n}{\left[\xi_n^2 + \gamma^2(Q) \right]^2} \right]^2 \left[\sum_n \xi_n^{-2} \right]^{-1} \right\}. \quad (2.52)$$

Здесь введена величина

$$D_n(Q) = \frac{\xi_n^2 - \gamma^2(Q)}{\xi_n^2 + \gamma^2(Q)}. \quad (2.53)$$

Состояние однонаправленной волны зарядовой плотности

Параметр порядка для однонаправленной волны зарядовой плотности имеет вид [69]

$$\Delta(\mathbf{q}) = \frac{(2\pi)^2}{S} \Delta(Q) \left[\delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) + \delta(\mathbf{q} + \mathbf{Q}) \right], \quad (2.54)$$

где вектор $\mathbf{Q}$ ориентирован вдоль произвольного направления. Из уравнений (2.35), (2.37), (2.39) и (2.44), находим свободную энергию состояния однонаправленной волны зарядовой плотности

$$\mathcal{F}^u = \mathcal{F}_0 + 4 S n_L T_0(Q) \left[b_2 \Delta^2 + b_4 \Delta^4 \right], \quad (2.55)$$

где

$$b_2 = \frac{a_2}{3} = \left[1 - \frac{T_0(Q)}{\pi^2 T} \sum_n \frac{1}{\xi_n^2 + \gamma^2(Q)} \right] \quad (2.56)$$

и

$$b_4 = \frac{4 T_0^3(Q)}{\pi^4 T^3} \left\{ \sum_n \frac{\xi_n^4}{\left[\xi_n^2 + \gamma^2(Q) \right]^4} \left[D_n(0) + \frac{1}{2} D_n(2Q) \right] + 2 \left[\sum_n \frac{\xi_n}{\left[\xi_n^2 + \gamma^2(Q) \right]^2} \right]^2 \right. \\ \left. \times \left[\sum_n \xi_n^{-2} \right]^{-1} \right\}. \quad (2.57)$$

Подчеркнем, что выражения (2.47)-(2.53) для свободной энергии состояния треугольной волны зарядовой и (2.55)-(2.57) для свободной энергии состояния однонаправленной волны зарядовой плотности составляют основной результат этой главы. Они обобщают результаты работы [23] на случай *слабого* беспорядка, и переходят в них в чистом пределе $1/\tau \rightarrow 0$.

2.3 Фазовая диаграмма в приближении среднего поля

2.3.1 Линия неустойчивости (спинодаль)

Как хорошо известно [83], обращение в нуль коэффициента при квадратичном члене разложений Ландау (2.47) и (2.55) соответствует неустойчивости однородного состояния. В рассматриваемом случае эта неустойчивость соответствует возможному фазовому переходу второго рода из однородного состояния в состояние волны зарядовой плотности. Как обычно, симметрия образующейся фазы определяется старшими членами разложения Ландау.

Из уравнений (2.48) и (2.56) находим, что на линии неустойчивости должно выполняться соотношение

$$\frac{T}{T_0(Q)} = \frac{1}{\pi^2} \sum_n \frac{1}{\xi_n^2 + \gamma^2(Q)}. \quad (2.58)$$

Решения $T(Q)$ этого уравнения зависят от модуля вектора $\mathbf{Q}$, характеризующего состояние волны зарядовой плотности. Температура T_{inst} , при которой образуется неустойчивость, определяется максимально возможным значением $T(Q)$:

$$T_{\text{inst}} = \max_Q T(Q), \quad (2.59)$$

а соответствующее значение Q_0 , при котором достигается максимум, $T_{\text{inst}} = T(Q_0)$, определяет период волны зарядовой плотности. Потенциал Хартри-Фока (2.14) имеет минимумы на векторах Q_k , для которых форм-фактор $F_N(Q_k)$ равен нулю. В *чистом* случае это определяет $Q_0 = \min_k Q_k = r_0/R_c$,

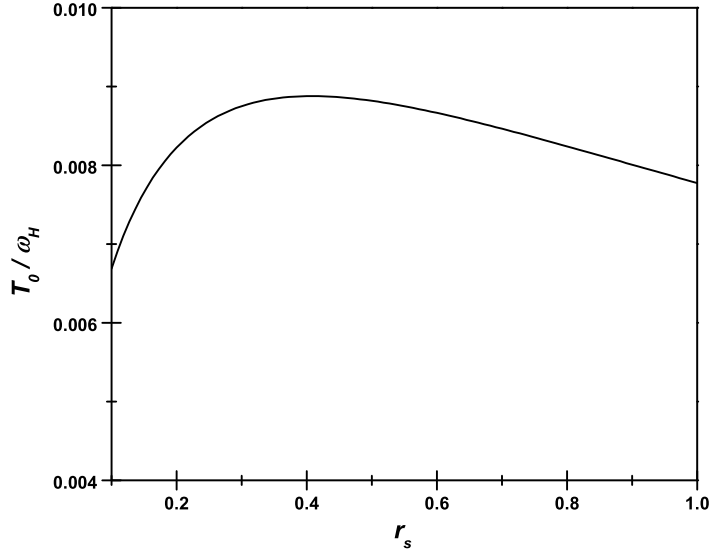


Рис. 2.2: Зависимость T_0 от r_s .

где $r_0 \approx 2.4$ – это первый нуль функции Бесселя $\mathcal{J}_0(x)$ [21]. Можно проверить (см. раздел 2.7), что в рассматриваемом случае дельта-коррелированного случайного потенциала сдвига вектора Q_0 не происходит. Таким образом, температура неустойчивости определяется уравнением

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi^2} \operatorname{Re} \psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau} + i \frac{\mu_N}{2\pi T} \right), \quad (2.60)$$

где $\psi'(z)$ – это производная дигамма функции, Re обозначает действительную часть, а $T_0 \equiv T_0(Q_0)$ температуру перехода в чистом случае. Согласно работе [21],

$$T_0 = \frac{r_s \omega_H}{4\pi \sqrt{2}} \left[\ln \left(1 + \frac{c}{r_s} \right) - \frac{c}{\sqrt{2} + r_s} \right], \quad (2.61)$$

где $c = 1/(\sqrt{2}r_0) \approx 0.3$, а T_0 определяется характерной эффективной энергией взаимодействия $e^2/R_c = r_s \omega_H / \sqrt{2} \ll \omega_H$. Зависимость величины T_0 от r_s приведена на Рис. 2.2.

Уравнение (2.60) содержит химический потенциал μ_N , отсчитываемый от положения N -ого уровня Ландау, температуру T и ширину N -ого уровня Ландау $1/(2\tau)$. Эти параметры вместе определяют фактор заполнения N -

ого уровня Ландау $\nu_N = \nu - 2N$. Однако, для того чтобы явно найти его необходимо знать плотность состояний. Поэтому для теоретического анализа более удобно пользоваться непосредственно химическим потенциалом μ_N , чем фактором заполнения ν_N .

Уравнение (2.60) может быть решено аналитически в двух предельных случаях: когда температура T не сильно отличается от T_0 и когда наоборот температура T близка к нулю.

В первом случае, ширина N -ого уровня Ландау $1/(2\tau)$ и химический потенциал μ_N малы по сравнению с T_0 , и, следовательно, разложение по степеням $1/(T_0\tau)$ и μ_N/T_0 оправдано. Как и следовало ожидать, наличие примесей приводит к понижению температуры неустойчивости:

$$\frac{T_{\text{inst}}}{T_0} = 1 - \frac{7\zeta(3)}{\pi^3 T_0 \tau} - \frac{\mu_N^2}{4T_0^2}, \quad \frac{1}{2\tau}, \mu_N \ll T_0. \quad (2.62)$$

В обратном случае, $T \ll T_0$, уравнение (2.60) дает

$$\frac{T_{\text{inst}}}{T_0} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi^2} \sqrt{1 - \frac{\pi}{8T_0\tau} - \frac{\pi^2 \mu_N^2}{16T_0^2}}, \quad \sqrt{1 - \frac{\pi}{8T_0\tau}} \ll 1, \quad \frac{\mu_N}{T_0} \ll 1. \quad (2.63)$$

Из уравнения (2.63) следует, что неустойчивость однородного состояния имеет место только, если ширина N -ого уровня Ландау $1/(2\tau)$ меньше критического значения $1/(2\tau_c(\mu_N))$, которое зависит от химического потенциала μ_N . Наибольшее значение $1/\tau_c(\mu_N)$ достигается при $\mu_N = 0$ и равно

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{8T_0}{\pi}. \quad (2.64)$$

2.3.2 Заполненный на половину уровень Ландау ($\nu_N = 1/2$)

Рассмотрим теперь случай заполненного на половину N -ого уровня Ландау ($\nu_N = 1/2$), т.к. этот случай связан с недавними экспериментами [11, 12]. В этом случае химический потенциал равен нулю, $\mu_N = 0$, если конечно плотность состояний симметрична относительно положения N -ого уровня

Ландау. Заметим, что при $\nu_N = 1/2$ коэффициент a_3 обращается в нуль из-за симметрии частица – дырка. Это означает, что фазовый переход из однородного состояния в состояние волны зарядовой плотности будет второго рода вне зависимости от симметрии, а температура T_c фазового перехода определяется решением уравнения, которое следует из уравнения (2.60) при $\mu_N = 0$,

$$\frac{T_c}{T_0} = \frac{2}{\pi^2} \zeta \left(2, \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T_c \tau} \right). \quad (2.65)$$

Здесь $\zeta(k, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (m + z)^{-k}$ – это обобщенная зета-функция Римана. Аналитическое решение этого уравнения в случае высоких и низких температур может быть получено из уравнений (2.62) и (2.63), если положить в них $\mu_N = 0$. Решение во всей области температур (линия фазового перехода), полученное численным решением уравнения (2.65), показано на Рис. 2.3.

Для анализа в какое же из двух возможных состояний совершается переход, вычислим коэффициенты в членах четвертой степени в разложениях свободной энергии. Из уравнений (2.52) и (2.57) при $\mu_N = 0$ получаем

$$a_4 = \frac{12T_0^3}{\pi^4 T^3} \left[-7\zeta \left(4, \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T \tau} \right) + 12\Phi_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T \tau} \right) + 6\Phi_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T \tau} \right) + 8\Phi_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T \tau} \right) \right] \quad (2.66)$$

и

$$b_4 = \frac{2T_0^3}{\pi^4 T^3} \left[-3\zeta \left(4, \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T \tau} \right) + 4\Phi_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T \tau} \right) + 2\Phi_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T \tau} \right) \right]. \quad (2.67)$$

Здесь введена новая функция

$$\Phi_a \left(\frac{1}{2} + z \right) = \frac{z \mathcal{J}_0(ar_0) \zeta \left(2, \frac{1}{2} + z \right) - \text{Im} \psi \left(\frac{1}{2} + z + i z \mathcal{J}_0(ar_0) \right)}{z^3 \mathcal{J}_0^3(ar_0)}. \quad (2.68)$$

Минимизируя свободные энергии $\mathcal{F}^{t,u}$ находим, что состояние однонаправленной волны зарядовой плотности имеет более низкую энергию.

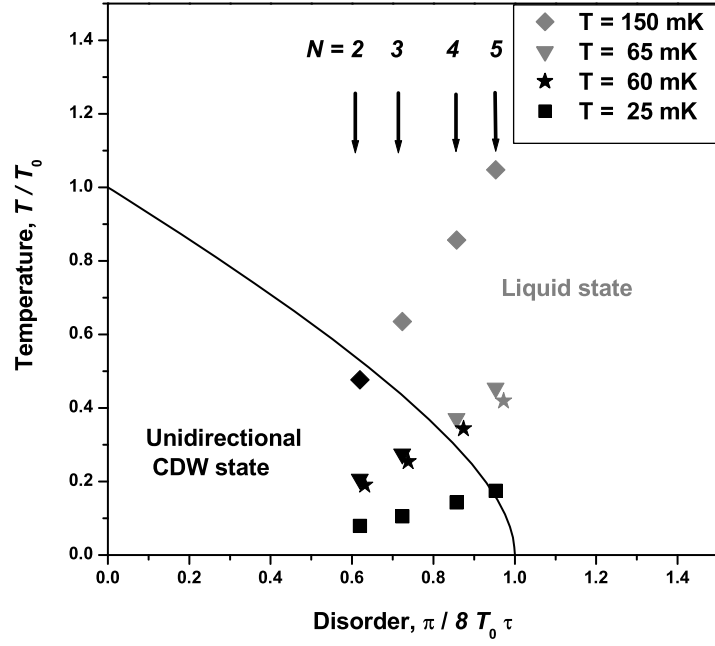


Рис. 2.3: Фазовая диаграмма при $\nu_N = 1/2$. Линия фазового перехода получена из уравнения (2.65) и показана сплошной линией. Квадраты, треугольники, звездочки и ромбы – экспериментальные точки из работ [11] и [12], причем серым цветом отмечены точки, где анизотропия магнитосопротивления не наблюдалась, а черным, где наблюдалась (см. раздел 2.5.1).

Таким образом, при половинном заполнении уровня Ландау, $\nu_N = 1/2$, и если $1/\tau < 1/\tau_c$, фазовый переход из однородного состояния происходит в состояние однонаправленной волны зарядовой плотности. Ниже в Раз. 2.5.1 мы сравним эти результаты с экспериментом.

Как можно видеть из рис. 2.3, в случае слабого беспорядка область существования состояния однонаправленной волны зарядовой плотности при половинном заполнении существенно меньше, чем в чистом случае.

2.3.3 Фазовая диаграмма при нулевой температуре

В этом разделе будет проанализирована фазовая диаграмма при нулевой температуре, причем будем считать, что ширина уровня Ландау близка к

критическому значению $1/2\tau_c = 4T_0/\pi$. Тогда, параметр порядка Δ мал, и можно использовать разложения свободной энергии (2.47) и (2.55) при нулевой температуре. Коэффициенты a_i и b_i принимают вид

$$\begin{aligned} a_2 &= 3\left(1 - \frac{8T_0\tau}{\pi}H_1(\mu_N\tau)\right), \quad a_3 = 2\pi\left(\frac{8T_0\tau}{\pi}\right)^2 H_2(\mu_N\tau), \\ a_4 &= 3\pi^2\left(\frac{8T_0\tau}{\pi}\right)^3 H_3(\mu_N\tau, QR_c) \end{aligned} \quad (2.69)$$

для состояния треугольной волны зарядовой плотности, и

$$b_2 = \frac{a_2}{3}, \quad b_4 = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{8T_0\tau}{\pi}\right)^3 H_4(\mu_N\tau, QR_c) \quad (2.70)$$

для состояния однонаправленной волны зарядовой плотности. Здесь функции $H_i(z)$ определены как

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{1+4z^2}, \quad H_2(z) = 4zH_1(z), \\ H_3(z, r) &= \frac{1}{2}\frac{108z^2-5}{(1+4z^2)^3} + 3R_0(z, r) + 2R_1(z, r) + \frac{1}{2}R_2(z, r) + 2R_{\sqrt{3}}(z, r), \\ H_4(z, r) &= \frac{28z^2-1}{(1+4z^2)^3} + 2R_0(z, r) + R_2(z, r), \end{aligned} \quad (2.71)$$

где

$$R_a(z, r) = \frac{2H_1(z)}{\mathcal{J}_0^2(ar)} - \frac{1}{\mathcal{J}_0^3(ar)} \arctan \frac{2\mathcal{J}_0(ar)}{1+4z^2 - \mathcal{J}_0^2(ar)}. \quad (2.72)$$

В результате линия неустойчивости описывается уравнением

$$\frac{\pi}{8T_0\tau} = H_1(\mu_N\tau), \quad (2.73)$$

которое получается из общего уравнения (2.60) в пределе нулевой температуры. В случае $\mu_N \ll T_0$, решение уравнения (2.73) имеет простой вид

$$\frac{\pi}{8T_0\tau} = 1 - \frac{\pi^2 \mu_N^2}{16 T_0^2}, \quad \mu_N \ll T_0 \quad (2.74)$$

как и следует из уравнения (2.63) при $T = 0$.

Линия перехода первого рода из однородного состояния в состояние треугольной волны зарядовой плотности определяется уравнением

$$\frac{\pi}{8T_0\tau} = H_1(\mu_N\tau) + \frac{H_2^2(\mu_N\tau)}{9H_3(\mu_N\tau, QR_c)}. \quad (2.75)$$

Как и ранее, из всех решений $1/\tau(Q)$ этого уравнения при разных Q должно быть взято максимальное. Оказывается, что максимум приходится не на $Q = Q_0$ как в это было в чистом случае [23], а на $Q_0 + \delta Q$, где для случая $\mu_N \ll T_0$ сдвиг равен

$$\delta Q \simeq -0.003 \frac{\mu_N^2}{T_0^2} R_c^{-1}, \quad \mu_N \ll T_0. \quad (2.76)$$

Подчеркнем, что наличие изменения периода треугольной волны зарядовой плотности вызвано наличием примесей в системе. Однако, в пределе $\mu_N \ll T_0$ он оказывается численно мал и в дальнейших расчетах мы не будем принимать его во внимание. При $\mu_N \ll T_0$, линия перехода первого рода из однородного состояния в состояние треугольной волны зарядовой плотности дается явным выражением

$$\frac{\pi}{8T_0\tau} = 1 - 0.45 \frac{\mu_N^2}{T_0^2}, \quad \mu_N \ll T_0. \quad (2.77)$$

Сравнивая свободные энергии состояний треугольной и однонаправленной волн зарядовой плотности, находим уравнение, описывающее линию фазового перехода первого рода между ними,

$$\frac{\pi}{8T_0\tau} = H_1 - \frac{H_2^2[2H_3 + H_4][3H_4 + \sqrt{H_4^2 + 2H_3H_4}]}{2H_3(2H_3 - 3H_4)^2}, \quad (2.78)$$

где для краткости опущены аргументы функций H_i . В случае $\mu_N \ll T_0$ уравнение (2.78) может быть решено явно. Для линии фазового перехода первого рода между состояниями треугольной и однонаправленной волн зарядовой плотности находим

$$\frac{\pi}{8T_0\tau} = 1 - 2.84 \frac{\mu_N^2}{T_0^2}, \quad \mu_N \ll T_0. \quad (2.79)$$

Для других значений параметра μ_N/T_0 уравнения (2.73), (2.75) и (2.78) могут быть решены численно. Результаты показаны на Рис. 2.4. Видно, что при фиксированном значении ширины уровня Ландау (безразмерный параметр $\pi/8T_0\tau$ на Рис. 2.4) уменьшение химического потенциала μ_N приводит сначала к переходу из однородного состояния в состояние

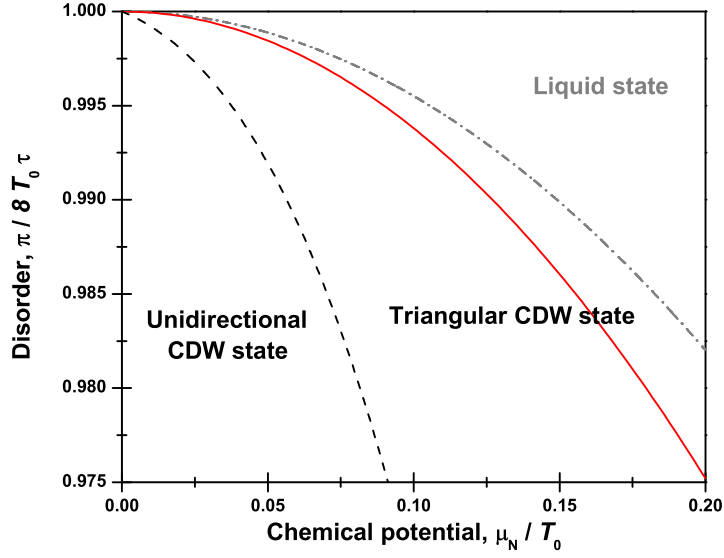


Рис. 2.4: Фазовая диаграмма при нулевой температуре около $\nu_N = 1/2$. Сплошная линия соответствует спинодали (2.73), пунктирная линия получена из уравнения (2.75), а точно-пунктирная из уравнения (2.78).

треугольной волны зарядовой плотности, а потом уже в состояние однонаправленной волны зарядовой плотности. Отметим, что рассмотрение в рамках разложения свободной энергии по параметру порядка применимо только, когда параметр порядка мал, т.е. в данном случае при $\mu_N \ll T_0$ и $\pi/8T_0\tau \sim 1$. Можно однако ожидать, что вне этой области топология фазовой диаграммы остается такой же.

2.4 Слабая кристаллизация

Параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ имеет смысл перевального решения для плазмонного поля, которое появляется при преобразовании Хаббарда-Стратоновича для члена с эффективным электрон-электронным взаимодействием в действии (2.4). Разложения свободной энергии (2.47) и (2.55) для состояний волн зарядовой плотности были получены в предположении о малости флуктуаций

параметра порядка $\Delta(\mathbf{r})$. Однако ясно, что по мере приближения к линии фазового перехода второго рода (для простоты будем рассматривать случай $\nu_N = 1/2$) флуктуации параметра порядка растут. Для того, чтобы проанализировать влияние этих флуктуаций на фазовый переход, применим подход, аналогичный предложенному Бразовским [84]. Будем считать, что параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ в разложениях свободной энергии (2.47) и (2.55) имеет еще и флуктуирующую часть $\phi(\mathbf{r})$, т.е. сделаем замену

$$\Delta(\mathbf{r}) \rightarrow \Delta(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r}). \quad (2.80)$$

Тогда находим для свободной энергии

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{F}}{T} = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2 l_H^{-2}} [t + (q - Q)^2 l_H^2] \varphi(\mathbf{q}) \varphi(-\mathbf{q}) + \frac{1}{4!} \prod_{j=1}^4 \left[\int \frac{d\mathbf{q}_j}{(2\pi)^2 l_H^{-2}} \varphi(\mathbf{q}_j) \right] \\ \times \lambda(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4), \end{aligned} \quad (2.81)$$

где безразмерное поле $\varphi(\mathbf{q})$ имеет конденсатную и флуктуирующую части

$$\varphi(\mathbf{q}) = \varphi_0(\mathbf{q}) + \delta\varphi(\mathbf{q}), \quad (2.82)$$

связанные с $\Delta(\mathbf{q})$ и $\phi(\mathbf{q})$ как

$$\begin{aligned} \varphi_0(q) &= \frac{8T_0 R_c}{T l_H} \sqrt{\pi \kappa \left(\frac{1}{4\pi T \tau} \right)} L_x L_y n_L \Delta(q), \\ \delta\varphi(q) &= \frac{8T_0 R_c}{T l_H} \sqrt{\pi \kappa \left(\frac{1}{4\pi T \tau} \right)} L_x L_y n_L \phi(q). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Здесь введена функция

$$\kappa(z) = \frac{2}{\pi^2} \left[\beta_1 \zeta \left(2, \frac{1}{2} + z \right) + \beta_2 z^2 \zeta \left(4, \frac{1}{2} + z \right) \right], \quad (2.84)$$

с постоянными β_i , определенными как,

$$\beta_1 = \frac{\partial \ln T_0(r_0)}{\partial r_0} \approx 2.58, \quad \beta_2 = \mathcal{J}_1^2(r_0) \approx 0.27. \quad (2.85)$$

Если в выражении (2.81) не было бы члена с взаимодействием, то температура перехода определялась бы обращением в нуль величины

$$t = \frac{l_H^2}{R_c^2} \left[\kappa \left(\frac{1}{4\pi T\tau} \right) \right]^{-1} \left[\frac{T}{T_0} - \frac{2}{\pi^2} \zeta \left(2, \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau} \right) \right]. \quad (2.86)$$

Можно считать, что в вершине четверного взаимодействия $\lambda(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)$ все векторы $\mathbf{q}_j$ равны по модулю Q_0 , т.е. $q_j = Q_0$. Однако, в зависимости от их ориентации следует различать два типа вершин

$$\lambda(+, -, +, -) = \lambda(-, +, +, -) = \lambda_0, \quad \lambda(+, +, -, -) = \lambda_2, \quad (2.87)$$

где

$$\lambda_a \equiv \lambda_a \left(\frac{1}{4\pi T\tau} \right) = \frac{2}{\pi^4} \left[-\zeta \left(4, \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau} \right) + 2\Phi_a \left(4, \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau} \right) \right]. \quad (2.88)$$

Функцию Грина для флуктуаций $\varphi(q)$ можно искать в виде [84]

$$\langle \delta\varphi(\mathbf{q})\delta\varphi(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{1}{r + (q - Q_0)^2 l_H^2}, \quad (2.89)$$

тогда из условия минимума свободной энергии (2.81) по φ_0 и уравнения самосогласования для функции Грина (2.89) (см. Рис. 2.5) находим, что

$$6r = \phi_0^2(4\lambda_0 - \lambda_2), \quad -t = r \frac{2\lambda_0 + \lambda_2}{4\lambda_0 - \lambda_2} + \frac{1}{4}\lambda_0 Q_0 l_H r^{-1/2}. \quad (2.90)$$

Из выражений (2.90) получается, что фазовый переход из однородного состояния в состояние однонаправленной волны зарядовой плотности становится первого рода и происходит при более низкой температуре, которая определяется уравнением (см. для сравнения уравнение (2.65))

$$\frac{T_c}{T_0} = \frac{2}{\pi^2} \zeta \left(2, \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T_c\tau} \right) \left[1 - g \left(\frac{1}{4\pi T_c\tau} \right) N^{-2/3} \right], \quad (2.91)$$

где функция $g(z)$ определена как

$$g(z) = \frac{3\pi^2}{2} \left[\frac{3\pi r_0}{16} \right]^{2/3} \left[\frac{\lambda_0^2(z)}{\kappa(z)} \right]^{2/3} \left[\frac{2\lambda_0(z) + \lambda_2(z)}{4\lambda_0(z) - \lambda_2(z)} \right]^{1/3} \left[\zeta \left(2, \frac{1}{2} + z \right) \right]^{-2}. \quad (2.92)$$



Рис. 2.5: Уравнение самосогласования для функции Грина флуктуаций $\delta\varphi(\mathbf{r})$. Пунктирная линия обозначает конденсатную часть $\varphi_0(\mathbf{r})$.

Отметим, что функция $g(z)$ монотонно убывает от значения 0.46 при $z = 0$ до нуля при $z \rightarrow \infty$ (см. Рис. 2.6). Поэтому можно написать следующее неравенство на величину сдвига δT температуры перехода

$$\frac{\delta T}{T} \leq 3 \left(\frac{\pi r_0}{16\sqrt{\beta_1}} \right)^{2/3} N^{-2/3}, \quad N \gg 1, \quad (2.93)$$

причем равенство соответствует *чистому* случаю.

В уравнениях (2.90) опущен вклад недиагональной по импульсам функции Грина $\langle \delta\varphi(\mathbf{q})\delta\varphi(2\mathbf{Q}_0 - \mathbf{q}) \rangle$. Интеграл по импульсам от нее расходится степенным образом на малых импульсах [84], что находится в соответствии с невозможностью существования одномерной периодической структуры в бесконечной двумерной системе [83]. Для системы, ограниченной размерами порядка L , этот интеграл мал и, следовательно, им можно пренебречь, если

$$\frac{L}{R_c} \ll \left[\frac{2}{\pi^2} \kappa^2 \left(\frac{1}{4\pi T\tau} \right) \zeta \left(2, \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau} \right) \right]^{-1/3} N^{1/3}. \quad (2.94)$$

Функция в правой части неравенства (2.94) монотонно возрастает от значения 0.55 до ∞ когда $1/4\pi T\tau$ меняется от нуля до бесконечности, поэтому условие (2.94) выполняется тем лучше, чем ниже температура.

Уравнение (2.91) было получено в предположении, что основной вклад в интегралы по импульсам вносит область $Q \approx Q_0$. Это предположение

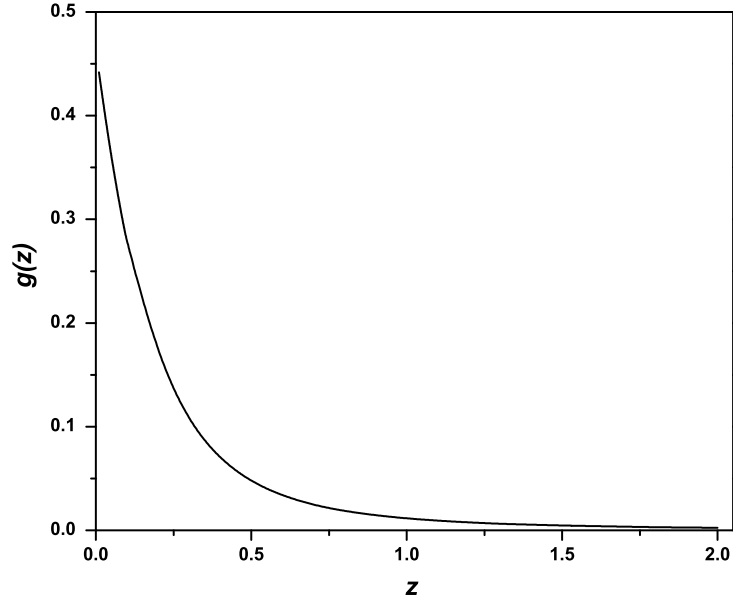


Рис. 2.6: График зависимости $g(z)$ от z (см. уравнение (2.91)).

оправдано, если выполняется условие

$$\frac{2}{\pi^2 r_0^2} \zeta^2 \left(2, \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau} \right) g \left(\frac{1}{4\pi T\tau} \right) \left[\kappa \left(\frac{1}{4\pi T\tau} \right) \right]^{-1} \ll N^{2/3}. \quad (2.95)$$

Функция в левой части неравенства (2.95) монотонно убывает от значения 0.023 до 0 когда $1/4\pi T\tau$ меняется от нуля до бесконечности, поэтому в силу $N \gg 1$, условие (2.95) действительно выполняется.

Согласно уравнению (2.93), флуктуации параметра порядка понижают температуру перехода на величину порядка $N^{-2/3} \ll 1$, и значит в рассматриваемом случае слабого магнитного поля ($N \gg 1$) их влиянием можно пренебречь. Другими словами критическая область оказывается параметрически мала и приближение среднего поля оправдано при $N \gg 1$. По мере понижения номера N уровня Ландау, влияние флуктуаций параметра порядка становится сильнее, как видно из уравнения (2.93). В этом режиме, детальные микроскопические вычисления вряд ли возможны из-за отсутствия малого параметра в теории. Можно пытаться развивать феноменологическую теорию, описывающую упругие флуктуации

в присутствии нарушения трансляционной инвариантности и беспорядка [17].

2.5 Обсуждение полученных результатов

2.5.1 Сравнение с экспериментом

Обсудим теперь возможное приложение полученных результатов к недавним экспериментам [11, 12]. Хотя результаты были получены в приближении среднего поля, которое оправдано при $N \gg 1$, можно ожидать, что уравнение (2.60) дает хорошую оценку для температуры перехода из однородного состояния в состояние однородной волны зарядовой плотности при $N = 2, 3, 4$.

В этих экспериментах *GaAs* гетероструктуры были относительно чистыми с низкотемпературной подвижностью $\mu^{(0)} \sim 10^7 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ и электронной плотностью $n_e \sim 2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$. Такая высокая подвижность в нулевом магнитном поле соответствует обратному транспортному времени рассеяния $\tau_{\text{tr}}^{-1} \sim 20 \text{ mK}$. Величину обратную обычному времени рассеяния τ_0 можно оценить как магнитное поле, где исчезают осцилляции Шубникова-де Гааза. Для экспериментальных образцов из работ [11, 12] это поле порядка 50 mT , что дает для обычного времени рассеяния оценку $\tau_0^{-1} \sim 0.8 \text{ K}$. Такое различие во временах рассеяния говорит о том, что длина корреляции случайного потенциала $d \gg k_F^{-1}$, где $k_F = mv_F$ обозначает импульс Ферми, причем

$$\frac{\tau_{\text{tr}}}{\tau_0} \sim (k_F d)^2. \quad (2.96)$$

Отсюда можно найти, что параметр $k_F d \sim 6$. Замечая, что в магнитная длина $l_H = \sqrt{\nu} k_F$, окончательно получаем следующую оценку для длины корреляции случайного потенциала $d \sim 6l_H/\nu$. Отсюда видно, что для факторов заполнения $\nu = \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}$ длина корреляции случайного потенциала d порядка магнитной длины l_H .

В построенной выше теории предполагалось выполнение условия $d \ll l_H$, поэтому для заполненного на половину уровня Ландау необходимо знать всего два параметра: ширину уровня Ландау $1/2\tau$ и масштаб температур T_0 . Несмотря на то, что в эксперименте $d \sim l_H$, для оценки ширины уровня Ландау $1/2\tau$ мы применим формулу [42]

$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{\sqrt{2N}}{\pi} \sqrt{\frac{e}{\mu^{(0)}n_e}} \omega_H, \quad (2.97)$$

где n_e – это плотность электронного газа, строго говоря, верную при $d \ll l_H$. Масштаб температур T_0 в широком диапазоне изменения параметра r_s может быть оценен как (см. Рис. 2.2)

$$T_0 \simeq 0.008 \omega_H, \quad 0.1 < r_s < 1. \quad (2.98)$$

Результаты, полученные в Раз. 2.3.2 накладывают ограничение на величину подвижности $\mu^{(0)}$ в нулевом магнитном поле. Для того, чтобы наблюдать состояние волны зарядовой плотности на уровне Ландау с номером N подвижность $\mu^{(0)}$ должна быть выше, чем $0.55 \cdot 10^3 eN/n_e$. Для типичного значения электронной плотности, $n_e \simeq 10^{11} \text{cm}^{-2}$, получаем следующую оценку $\mu^{(0)} > N \cdot 10^6 \text{cm}^2/Vs$.

В эксперименте [11] образцы были относительно чистыми с подвижностью $\mu^{(0)} > 9 \cdot 10^6 \text{cm}^2/Vs$, а электронной плотностью $n_e \approx 2.67 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$. При температуре $T = 150 \text{mK}$ магнетосопротивление на заполненном на половину уровне Ландау с $N = 2$ становилось анизотропным, тогда как на других уровнях с $N > 2$ оно оставалось еще изотропным. По мере того, как температуру понижали, номер уровня, на котором анизотропия в магнетосопротивлении появлялась, увеличивался. Так при температуре $T = 25 \text{mK}$, анизотропия в магнетосопротивлении наблюдалась для $N = 2, 3, 4$. На Рис. 2.3 отмечены точки, где анизотропия в магнетосопротивлении наблюдалась в эксперименте [11]. При этом были использованы уравнения (2.98) и (2.97). Как видно, положение линии

фазового перехода находится в согласии с экспериментальными данными: анизотропия в магнетосопротивлении при температуре $T = 150\text{ mK}$ должна существовать только для уровня Ландау с $N = 2$, тогда как, при $T = 25\text{ mK}$ она должна существовать для $N = 2, 3$, и 4, а для $N = 5$ уже нет, т.к. примеси индуцируют переход в однородное состояние. Отметим, что если бы температура перехода не зависела бы от ширины уровня Ландау, то анизотропия в магнетосопротивлении при температуре $T = 25\text{ mK}$ должна была бы сохраняться вплоть до $N = 0.008E_F/T \approx 12$ (см. (2.98)). Таким образом, учет влияния примесей важен для объяснения экспериментальных данных.

2.5.2 Сравнение с численными расчетами

Вопрос об образовании состояния волны зарядовой плотности на уровне Ландау с $N = 2$ при половинном заполнении $\nu_N = 1/2$ и нулевой температуре в присутствие дельта-коррелированного случайного потенциала численно изучался в работе [85]. Система из 12 электронов с неэкранированным взаимодействием $U_0(q) = 2\pi e^2/q$ была спроектирована на уровень Ландау с $N = 2$. После этого система диагонализировалась численно. В результате было найдено, что состояние волны зарядовой плотности переходит в однородное состояние при значении 0.12 безразмерного параметра $1/2\tau\omega_H$. Для того, чтобы сравнить результаты изложенного выше подхода с численным результатом, было вычислено T_0 для неэкранированного взаимодействия $U_0(q) = 2\pi e^2/q$ (вместо эффективного взаимодействия (2.6)), а потом вычислена величина $1/(2\tau\omega_H) = 4T_0/(\pi\omega_H)$. Оказалось, что построенная выше теория дает значение 0.14. Небольшое по сравнению с численным результатом отличие может быть объяснено с одной стороны, конечным числом электронов в численном эксперименте, а с другой стороны, недостаточностью приближения Хартри-Фока для

неэкранированного взаимодействия. Тем не менее, отметим, что согласие вполне удовлетворительное.

Отметим, что при учете экранирования электрон-электронного взаимодействия (см. (2.6)), переход из состояния волны зарядовой плотности в однородное состояние происходит при гораздо меньшем значении: $1/2\tau_c\omega_H \simeq 0.01$.

2.6 Заключение

Для системы двумерных взаимодействующих электронов в присутствие *слабого* беспорядка и *слабого* магнитного поля был исследован вопрос о существовании состояния волны зарядовой плотности в рамках приближения Хартри-Фока. В рассматриваемом случае слабого магнитного поля ($\nu \gg 1$), оказалось, что состояние однонаправленной волны зарядовой плотности при половинном заполнении уровня Ландау может существовать, только если ширина уровня Ландау $1/2\tau \leq 4T_0/\pi$. Также было показано, что при половинном заполнении состояние однонаправленной волны зарядовой плотности образуется с тем же периодом, что и в *чистом* случае. Вблизи $\nu_N = 1/2$ состояние однонаправленной волны зарядовой плотности выгоднее, чем состояние треугольной волны зарядовой плотности. Слабокристаллизационные поправки к приближению среднего поля оказались параметрически малы, порядка $(1/\nu)^{2/3} \ll 1$. Сравнение теории с результатами численного моделирования и экспериментальными данными показало хорошее согласие.

2.7 Приложение: Вектор неустойчивости

В этом разделе будет показано, что дельта-коррелированный случайный потенциал не меняет период однонаправленной волны зарядовой плотности.

Рассмотрим решение $T + \delta T$ уравнения (2.58) с вектором $Q = Q_0 + \delta Q$, где $\delta Q \ll Q_0$. Покажем, что тогда сдвиг δT всегда отрицательный, а значит максимальная температура соответствует вектору $Q = Q_0$, как и в чистом случае.

Для отклонения δQ , имеем

$$T_0(Q) = T_0(1 - \beta_1(\delta Q R_c)^2), \quad \mathcal{J}_0^2(Q R_c) = \beta_2(\delta Q R_c)^2. \quad (2.99)$$

Тогда наличие δT приводит к замене

$$\xi_n \rightarrow \xi_n - \frac{\delta T}{4\pi T^2 \tau} - i \frac{\delta T \mu_N}{2\pi T^2}, \quad (2.100)$$

в уравнении (2.58). Отсюда находим, что

$$\frac{\delta T}{T} = -(\delta Q R_c)^2 \frac{\beta_1 g_2 + \beta_2 z^2 g_4}{g_2 - 2(z g_3 + y \bar{g}_3)}, \quad (2.101)$$

где $z = 1/4\pi T \tau$ и $y = \mu_N/2\pi T$. Функции $g_a(z, y)$ и $\overline{g_a(z, y)}$ определены как

$$g_a(z, y) = \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^{-a}, \quad \overline{g_a(z, y)} = \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^{-a}. \quad (2.102)$$

Легко убедиться, что правая сторона уравнения (2.101) отрицательна при всех возможных значениях z и y .

Глава 3

Анизотропная проводимость двумерных электронов на высоком уровне Ландау, заполненном на половину

3.1 Введение

Недавно на высоких уровнях Ландау вблизи половинного заполнения при низких температурах было открыто явление сильной анизотропии в магнетосопротивлении [11, 12]. Сразу же происхождение этой анизотропии было связано с возможным образованием состояния однонаправленной волны зарядовой плотности вблизи на половину заполненного высокого уровня Ландау, которое предсказывали работы [21, 22, 23]. В пределе нулевой температуры, далеко от линии фазового перехода, где однонаправленная волна зарядовой плотности имеет сильно несинусоидальный профиль, тензор проводимости может быть вычислен в рамках эффективной теории для краевых возбуждений [71]. Качественно результат работы [71] соответствует поведению магнетосопротивления в пределе нулевой температуры [12, 86]. В работе [87] было предложено обобщение закона полукруга Дыхне–Рузина [88] для случая анизотропного тензора проводимости.

В настоящее время последовательный микроскопический анализ

зависимости магнетосопротивления от температуры вблизи линии фазового перехода из однородного состояния в состояние однонаправленной волны зарядовой плотности отсутствует. В этой главе такой анализ будет проведен при $(T_c - T)/T_c \ll 1$, где разложение по параметру порядка состояния однонаправленной волны зарядовой плотности оправдано. Вблизи линии фазового перехода роль флуктуаций параметра порядка возрастает. Будет исследовано влияние флуктуаций на тензор проводимости как выше, так и ниже температуры перехода T_c .

Как и ранее, будем предполагать, что примеси создают слабый случайный потенциал для двумерных электронов, т.е. примесное уширение уровня Ландау $1/(2\tau)$ оказывается много меньше расстояния между ними, $1/(2\tau) \ll \omega_H$. Одним из основных результатов этой главы является результат о том, что в состоянии однонаправленной волны зарядовой плотности у тензора проводимости σ_{ab} появляется анизотропная часть, $\sigma_{ab} = \sigma_{ab}^{(\text{isot})} + \sigma_{ab}^{(\text{anis})}$, которая при $T_c - T \ll T_c$ пропорциональна отклонению температуры T от температуры фазового перехода T_c , т.е. $\sigma_{ab}^{(\text{anis})} \propto (T_c - T)/T_c$. Другим основным результатом этой главы является тот факт, что выше температуры фазового перехода, $T > T_c$, имеется флуктуационная поправка $\delta\sigma_{ab}^{(\text{fluc})} \propto (|T_c - T|/T_c)^{-3/2}$ к проводимости однородного состояния $\sigma_{ab}^{(0)}$, которая обратно пропорциональна корню из отклонения температуры от критической. Физической причиной появления флуктуационной поправки к проводимости являются корреляции электронов, которые ниже температуры перехода привели бы к образованию состояния волны зарядовой плотности.

Ниже сначала будет выведено эффективное действие для трехуровневой модели, пригодной для вычисления проводимости (Раз. 3.2). В разделе 3.3 вычисляется тензор проводимости при половинном заполнении уровня Ландау. Флуктуационные поправки к проводимости однородного состояния и состояния однонаправленной волны зарядовой плотности рассматриваются

в Раз. 3.4. В разделе 3.5 полученные результаты обсуждаются в связи с экспериментами [11, 12].

3.2 Трехуровневая модель

3.2.1 Введение

Рассмотрим систему двумерных взаимодействующих электронов в присутствии случайного потенциала $V_{\text{dis}}(\mathbf{r})$ и поперечного магнитного поля H . Будем считать, что все условия, обсуждавшиеся в разделах 1.2.1 и 2.2.1 выполнены.

Термодинамический потенциал системы может быть записан как

$$\Omega = -\frac{T}{N_r} \int \mathcal{D}[\bar{\psi}, \psi] \int \mathcal{D}[V_{\text{dis}}] \mathcal{P}[V_{\text{dis}}] \exp \mathcal{S}[\bar{\psi}, \psi, V_{\text{dis}}]. \quad (3.1)$$

где действие $\mathcal{S}[\bar{\psi}, \psi, V_{\text{dis}}]$ в матцубаровском представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha, \omega_n, \omega_m} \bar{\psi}_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r}) \left[(i\omega_n + \mu - V_{\text{dis}}(\mathbf{r}))\delta_{nm} - \hat{\mathcal{H}} \right] \psi_{\omega_m}^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r}) \\ & - \frac{T}{2} \sum_{\omega_n, \omega_m, \nu_l} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \bar{\psi}_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r}) \psi_{\omega_n - \nu_l}^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r}) U_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bar{\psi}_{\omega_m}^{\alpha, \sigma'}(\mathbf{r}') \psi_{\omega_m + \nu_l}^{\alpha, \sigma'}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Напомним, что $\psi_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r})$ и $\bar{\psi}_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r})$ операторы уничтожения и рождения электронов. T обозначает температуру, μ химический потенциал, σ и σ' спиновые индексы, $\omega_n = \pi T(2n + 1)$ матцубаровскую фермионную частоту, а $\nu_n = 2\pi Tn$ бозонную. Матрица $\hat{\mathcal{H}}$ определена как

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\nu_n}^{\alpha} \mathcal{H}(\nu_n) I_n^{\alpha}, \quad (3.3)$$

где, напомним, матрицы

$$(I_n^{\alpha})_{kl}^{\beta\gamma} = \delta^{\alpha\beta} \delta^{\alpha\gamma} \delta_{k-l, n} \quad (3.4)$$

представляют собой генераторы $U(1)$ калибровочных преобразований. Одночастичный гамильтониан $\mathcal{H}$ описывает двумерный электрон в

постоянном перпендикулярном магнитном поле $H = \epsilon_{ab}\partial_a A_b$ и в переменном поле с вектор потенциалом $\mathbf{a}$ и имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(-i\nabla - e\mathbf{A} - e\mathbf{a})^2. \quad (3.5)$$

Как обычно, для простоты будем предполагать, что случайный потенциал дельта-коррелированный, т.е. функция распределения имеет вид

$$\mathcal{P}[V_{\text{dis}}(\mathbf{r})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} V_{\text{dis}}^2(\mathbf{r})\right). \quad (3.6)$$

Для усреднения по беспорядку будем, как и ранее, использовать метод реплик [48]. Реплики нумеруются индексом $\alpha = 1, \dots, N_r$.

Для дальнейшего будет удобно переписать одночастичный гамильтониан (3.5) через ковариантную производную

$$\mathbf{D} = \nabla - ie\mathbf{A}, \quad (3.7)$$

явно выделив переменный вектор потенциал $\mathbf{a}(\nu_n)$,

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2m}\mathbf{D}^2 + K(\nu_n), \quad K(\nu_n) = -\frac{e}{m}\mathbf{a}(\nu_n)\mathbf{D} + \frac{e^2}{2m} \sum_{\nu_m} \mathbf{a}(\nu_{n-m})\mathbf{a}(\nu_m). \quad (3.8)$$

3.2.2 Эффективное действие для трехуровневой модели

В предыдущей главе для определения фазовой диаграммы электронов на высоком N -ом уровне Ландау достаточно было оставить для рассмотрения только сам этот N -ый уровень Ландау. Для определения же транспортных свойств (проводимости системы) проектирование только на один уровень Ландау не годится так, как ковариантная производная $\mathbf{D}$ имеет ненулевые матричные элементы только для переходов между соседними уровнями [9]. Поэтому необходимо оставить в рассмотрении три уровня Ландау $(N-1)$ -ый, N -ый и $(N+1)$ -ый.

Легко обобщая метод, изложенный в главе 1, получим эффективное

действие для электронов на трех уровнях Ландау

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha, \omega_n, \omega_m} \overline{\psi_{\omega_n}^{\alpha, \sigma_1}}(\mathbf{r}) \left[(i\omega_n + \mu - V_{\text{dis}}(\mathbf{r}))\delta_{nm} - \hat{\mathcal{H}} \right] \psi_{\omega_m}^{\alpha, \sigma_1}(\mathbf{r}) \\ & - \frac{T}{2} \sum_{\omega_n, \omega_m, \nu_l} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \overline{\psi_{\omega_n}^{\alpha, \sigma_1}}(\mathbf{r}) \psi_{\omega_n - \nu_l}^{\alpha, \sigma_1}(\mathbf{r}) U_{\text{scr}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \overline{\psi_{\omega_m}^{\alpha, \sigma_2}}(\mathbf{r}) \psi_{\omega_m + \nu_l}^{\alpha, \sigma_2}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь уже $\psi_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r})$ и $\overline{\psi_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}}(\mathbf{r})$ операторы уничтожения и рождения электронов на $(N - 1)$ -ом, N -ом и $(N + 1)$ -ом уровнях Ландау,

$$\psi_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r}) = \sum_{p=N-1}^{N+1} \psi_{p\omega_n}^{\alpha, \sigma}(\mathbf{r}), \quad \overline{\psi_{\omega_n}^{\alpha, \sigma}}(\mathbf{r}) = \sum_{p=N-1}^{N+1} \overline{\psi_{p\omega_n}^{\alpha, \sigma}}(\mathbf{r}). \quad (3.10)$$

Экранированный потенциал электрон-электронного взаимодействия $U_{\text{scr}}(\mathbf{r})$ немного отличается от полученного в главе 1, т.к. в него не включен вклад от $(N - 1)$ -ого и $(N + 1)$ -ого уровней Ландау, а именно

$$U_{\text{scr}}(q) = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon q} \frac{1}{1 + \frac{2}{qa_B} \left(1 - \frac{\pi}{6\omega_H \tau} \right) (1 - \mathcal{J}_0^2(qR_c) - 2\mathcal{J}_1^2(qR_c))}, \quad (3.11)$$

Эффективное действие (3.9) получено в тех же предположениях, что и в главе 1. В дальнейшем будем пренебрегать членом $\pi/(6\omega_H \tau)$, имея ввиду случай $\omega_H \tau \gg 1$.

3.2.3 Приближение Хартри-Фока

Действие (3.9) содержит электронные состояния как со спином направленном вверх, так и вниз. При этом, только электрон-электронное взаимодействие может перевернуть электронный спин. Это означает, что состояние волны зарядовой плотности характеризуется параметром порядка, который теперь матрица в пространстве как номеров уровней Ландау, так и спиновых индексов, $\Delta_{p_1 p_2}^{\sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{Q})$. Однако, как будет видно из дальнейшего, при условии $\Delta_{\text{ex}} = (r_s \omega_H / \pi \sqrt{2}) \ln 2\sqrt{2}/r_s \gg \max\{T, \tau^{-1}\}$ волна зарядовой плотности будет образовываться только на N -ом уровне Ландау с определенным

направлением спина, например вверх. Тогда уровни со спином электронов, направленным вниз, выпадут из рассмотрения. Поэтому сразу ограничим рассмотрение уровнями с одним направлением спина. Тогда параметр порядка связан с изменением электронной плотности на $N - 1$, N , и $N + 1$ уровнях Ландау, как

$$\langle \delta \rho(\mathbf{q}) \rangle = S n_L \sum_{p_1, p_2=N-1}^{N+1} \Delta_{p_1 p_2}(\mathbf{q}) F_{p_1 p_2}(\mathbf{q}), \quad (3.12)$$

где S – это площадь слоя двумерных электронов, а форм-фактор $F_{p_1 p_2}(\mathbf{Q})$ определен как

$$F_{p_1 p_2}(\mathbf{q}) = n_L^{-1} \sum_k \phi_{p_1 k}^*(0) \phi_{p_2 k}(\mathbf{q} l_H^2) \exp \left(\frac{i}{2} q_x q_y l_H^2 \right). \quad (3.13)$$

Отметим, что при $p_1 = p_2 = N$ форм-фактор $F_{NN}(\mathbf{q})$ совпадает с $F_N(q)$ и дается выражением (2.9).

После расщепления члена с взаимодействием в действии (3.9) в приближении Хартри-Фока (см. [69]) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = -\frac{N_r \Omega_\Delta}{T} + \int d\mathbf{r} \sum_{p_1, p_2} \sum_{\alpha, \omega_n, \omega_m} \overline{\psi_{p_1 \omega_n}^\alpha}(\mathbf{r}) \left[(i\omega_n + \mu - V_{\text{dis}}(\mathbf{r})) \delta_{nm} - \hat{\mathcal{H}} \right. \\ \left. + \lambda_{p_1 p_2}(\mathbf{r}) \right] \psi_{p_2 \omega_m}^\alpha(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

причем

$$\Omega_\Delta = \frac{n_L S^2}{2} \sum_{p_1 p_2 p_3 p_4} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} U_{p_1 p_2 p_3 p_4}(\mathbf{q}) \Delta_{p_1 p_4}(\mathbf{q}) \Delta_{p_3 p_2}(-\mathbf{q}). \quad (3.15)$$

Потенциал $\lambda_{p_1 p_2}(\mathbf{r})$ в выражении (3.14) возникает как следствие возмущения однородного распределения электронной плотности волной зарядовой плотности и связан с параметром порядка следующим образом

$$\lambda_{p_1 p_2}(\mathbf{q}) = S \sum_{p_3 p_4} \frac{U_{p_3 p_4 p_1 p_2}(\mathbf{q})}{F_{p_1 p_2}(-\mathbf{q})} \Delta_{p_3 p_4}(\mathbf{q}), \quad (3.16)$$

где $U_{p_1 p_2 p_3 p_4}(\mathbf{q})$ обобщает потенциал Хартри-Фока, введенный в предыдущей главе (см. 2.14), и определен как

$$U_{p_1 p_2 p_3 p_4}(\mathbf{q}) = -n_L \left(U_{\text{scr}}(\mathbf{q}) F_{p_1 p_2}(\mathbf{q}) F_{p_3 p_4}(-\mathbf{q}) - \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2 n_L} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{p}l_H^2} \right. \\ \left. \times U_{\text{scr}}(\mathbf{p}) F_{p_1 p_4}(\mathbf{p}) F_{p_3 p_2}(-\mathbf{p}) \right). \quad (3.17)$$

3.2.4 Усреднение по случайному потенциалу

После усреднения по случайному потенциалу $V_{\text{dis}}(\mathbf{r})$ действие (3.14) принимает вид (см. раздел 1.2.3)

$$\mathcal{S} = -\frac{N_r \Omega_\Delta}{T} - \frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} \text{tr} Q^2(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(i\omega + \mu - \hat{\mathcal{H}} + \check{\lambda} + iQ \right) \psi(\mathbf{r}), \quad (3.18)$$

где новое поле $Q(\mathbf{r})$, как и ранее, представляет собой матрицу в матцубаровском и репличном пространствах, а

$$\psi^\dagger \check{\lambda} \psi = \sum_{p_1 p_2} \sum_{\alpha, \omega_n} \overline{\psi_{p_1 \omega_n}^\alpha(\mathbf{r})} \lambda_{p_1 p_2}(\mathbf{r}) \psi_{p_2 \omega_n}^\alpha(\mathbf{r}). \quad (3.19)$$

Напомним, что действие (3.18) при нулевой температуре, т.е. при $\omega_n \rightarrow 0$, в отсутствие потенциала $\check{\lambda}(\mathbf{r})$ и переменного вектор потенциала $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ имеет перевального решение

$$Q_{\text{sp}} = V^{-1} P_{\text{sp}} V, \quad (P_{\text{sp}})_{nm}^{\alpha\beta} = P_{\text{sp}}^n \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta}, \quad (3.20)$$

где V – глобальное унитарное вращение, а P_{sp}^n теперь подчиняется уравнению

$$P_{sp}^n = ig G^{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}), \quad G^{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{p=N-1}^{N+1} G_p^{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (3.21)$$

Функция Грина $G_p^{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ определена как

$$G_p^n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_k \phi_{pk}^*(\mathbf{r}) G_p(\omega_n) \phi_{pk}(\mathbf{r}'), \quad (3.22)$$

$$G_p(\omega_n) = [i\omega_n + \mu_N + \epsilon_N - \epsilon_p + iP_{\text{sp}}^n]^{-1},$$

где химический потенциал μ_N отсчитывается от N -ого уровня Ландау. В случае $\omega_H \tau \gg 1$ решение уравнения (3.21) имеет вид

$$P_{\text{sp}}^n \approx \frac{\text{sgn } \omega_n}{2\tau} \left(1 - \frac{1}{(2\omega_H \tau)^2} \right), \quad \frac{1}{2\tau} = \sqrt{gn_L}. \quad (3.23)$$

В дальнейшем будем пренебрегать малой поправкой $1/(2\omega_H \tau)^2 \ll 1$. Разделяя матричное поле $Q(\mathbf{r})$ на продольную $P(\mathbf{r})$ и поперечную части $V(\mathbf{r})$,

$$Q(\mathbf{r}) = V^{-1}(\mathbf{r})P(\mathbf{r})V(\mathbf{r}), \quad (3.24)$$

будем пренебрегать последней, по причинам, объясненным в предыдущей главе.

Наличие потенциала $\check{\lambda}(\mathbf{r})$ и вектор-потенциала $\mathbf{a}$ приводит к сдвигу перевального решения (3.23) из-за взаимодействия с ними флуктуаций $\delta P = P - P_{\text{sp}}$ поля P . Соответствующее действие для δP получается из уравнения (3.15) после интегрирования по фермионам

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d\mathbf{r} \, \text{tr} \ln G^{-1} - \frac{N_r \Omega_\Delta}{T} - \frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} \, \text{tr} (P_{\text{sp}} + \delta P)^2 \\ + \int d\mathbf{r} \, \text{tr} \ln [1 + (i\delta P + \hat{K} + \check{\lambda})G]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

В результате термодинамический потенциал выражается через функциональный интеграл по полям δP ,

$$\Omega = -\frac{T}{N_r} \ln \int \mathcal{D}[\delta P] I[\delta P] \exp \mathcal{S}, \quad (3.26)$$

где мера интегрирования $I[\delta P]$ определена соотношением (1.55).

Квадратичная по δP часть действия (3.25) вместе с мерой $\ln I[\delta P]$, определяет функцию Грина для поля δP (см. раздел 1.2.6)

$$\begin{aligned} \langle \delta P_{m_1 m_2}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) \delta P_{m_3 m_4}^{\gamma\delta}(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{g\delta_{m_1 m_4} \delta_{m_2 m_3} \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma} \Theta(m_1 m_3)}{1 + g\pi^{\omega_{m_1}}(\omega_{m_3} - \omega_{m_1}, \mathbf{q})} - \frac{2[1 - \Theta(m_1 m_3)]}{(\pi\rho)^2} \\ \times \frac{g\delta_{m_1 m_2} \delta^{\alpha\beta}}{1 + g\pi^{\omega_{m_1}}(0, \mathbf{q})} \frac{g\delta_{m_3 m_4} \delta^{\delta\gamma}}{1 + g\pi^{\omega_{m_3}}(0, \mathbf{q})}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где поляризационный оператор теперь содержит только функции Грина на $(N - 1)$ -ом, N -ом и $(N + 1)$ -ом уровнях Ландау

$$\begin{aligned} \pi^{\omega_m}(\nu_n, \mathbf{q}) &= \sum_{p_1 p_2} \pi_{p_1 p_2}^{\omega_m}(\nu_n, \mathbf{q}) = -n_L \sum_{p_1 p_2} G_{p_1}(\omega_m + \nu_n) G_{p_2}(\omega_m) \\ &\times F_{p_1 p_2}(\mathbf{q}) F_{p_2 p_1}(-\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.2.5 Термодинамический потенциал. Вклад второго порядка

В отсутствие переменного вектор-потенциала $\mathbf{a}$ эффективное действие (3.25) для поля $\delta P(\mathbf{r})$ должно сводиться к действию (2.21) в пределе $\max\{T, \tau^{-1}\} \ll \Delta_{\text{ex}} \ll \omega_H$. Другими словами, из всех параметров порядка $\Delta_{p_1 p_2}(\mathbf{q})$ должен выживать только $\Delta_{NN}(\mathbf{q}) \equiv \Delta(\mathbf{q})$. Для того, чтобы продемонстрировать это, вычислим разложение термодинамического потенциала Ω до второго порядка по степеням параметра порядка $\Delta_{p_1 p_2}(\mathbf{q})$ при $\mathbf{a} = 0$.

Производя вычисления аналогичные представленным в Раз. 2.2.4, найдем, что

$$\Omega = \Omega^{(0)} + \Omega^{(2)} + \dots, \quad (3.29)$$

где

$$\Omega^{(0)}(\mu) = \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} \ln G^{-1} - \frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} P_{\text{sp}}^2 \quad (3.30)$$

это термодинамический потенциал однородного состояния, а

$$\begin{aligned} \Omega^{(2)} &= \frac{n_L S^2}{2T} \sum_{p_1 \dots p_4} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \left[U_{p_1 p_2 p_3 p_4}(\mathbf{q}) - T \sum_{\omega_n} \sum_{p_5 \dots p_8} \frac{U_{p_1 p_2 p_5 p_6}(\mathbf{q})}{F_{p_5 p_6}(\mathbf{q})} \frac{U_{p_3 p_4 p_7 p_8}(-\mathbf{q})}{F_{p_7 p_8}(-\mathbf{q})} \right. \\ &\times \left. \left(\delta_{p_5 p_8} \delta_{p_6 p_7} - \frac{g \pi_{p_8 p_7}^{\omega_n}(0, \mathbf{q})}{1 + g \pi^{\omega_n}(0, \mathbf{q})} \right) \pi_{p_5 p_6}^{\omega_n}(0, \mathbf{q}) \right] \Delta_{p_1 p_2}(\mathbf{q}) \Delta_{p_3 p_4}(-\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

определяет поправку квадратичную по параметру порядка $\Delta_{p_1 p_2}(\mathbf{q})$.

Необходимо отметить, что поляризационные операторы $\pi_{p_1 p_2}^{\omega_n}(\nu_n, \mathbf{q})$ подчиняются следующей иерархии по отношению к малому параметру

$$\max\{T, \tau^{-1}\}/\omega_H \ll 1$$

$$\pi_{p_1 p_2}^{\omega_n}(\nu_n, \mathbf{q}) \sim \begin{cases} \mathcal{O}(1), & p_1 = p_2 = N, \\ \mathcal{O}\left(\frac{\max\{T, \tau^{-1}\}}{\omega_H}\right), & p_1 = N \text{ или } p_2 = N, \\ \mathcal{O}\left(\left[\frac{\max\{T, \tau^{-1}\}}{\omega_H}\right]^2\right), & p_1 \neq N \text{ и } p_2 \neq N. \end{cases} \quad (3.32)$$

Поэтому в выражении (3.31) можно приближенно считать, что

$$\pi_{p_1 p_2}^{\omega_n}(0, \mathbf{q}) = \pi_0^{\omega_n}(0, q) \delta_{p_1 N} \delta_{p_2 N}, \quad \pi^{\omega_n}(0, \mathbf{q}) = \pi_0^{\omega_n}(0, q), \quad (3.33)$$

где для удобства в дальнейшем введено $\pi_0^{\omega_n}(0, q) \equiv \pi_{NN}^{\omega_n}(0, q)$. Таким образом, из (3.31) получаем

$$\begin{aligned} \Omega^{(2)} = \frac{n_L S^2}{2T} \sum_{p_1 \dots p_4} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} & \left[U_{p_1 p_2 p_3 p_4}(\mathbf{q}) + T \sum_{\omega_n} \frac{n_L G_N^2(\omega_n)}{1 + g \pi_0^{\omega_n}(0, \mathbf{q})} \right. \\ & \left. \times U_{p_1 p_2 N N}(\mathbf{q}) U_{p_3 p_4 N N}(-\mathbf{q}) \right] \Delta_{p_1 p_2}(\mathbf{q}) \Delta_{p_3 p_4}(-\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Для того, чтобы проанализировать какие из параметров порядка $\Delta_{p_1 p_2}(\mathbf{q})$ могут принимать отличные от нуля значения, необходимо диагонализировать матрицу 9×9 в выражении (3.34). Оказывается однако, что нетривиальная часть выражения (3.34) сводится к

$$\begin{aligned} \delta\Omega^{(2)} = \frac{n_L S^2}{2T} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} T_0(q) & \left(\Delta(\mathbf{q}), \frac{T_1(q)}{T_0(q)} \varphi(\mathbf{q}) \right) \begin{pmatrix} a(q) & a(q) \\ a(q) & a(q) + 2\xi(q) \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} \Delta(-\mathbf{q}) \\ \frac{T_1(q)}{T_0(q)} \varphi(-\mathbf{q}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Здесь $\varphi(\mathbf{q})$ представляет собой линейную комбинацию всех $\Delta_{p_1 p_2}(\mathbf{q})$ кроме $\Delta(\mathbf{q})$. Характерные энергии $T_0(q)$ и $T_1(q)$ определены как (см. Раз. 2.2.6)

$$T_0(q) = \frac{U_{NNNN}(q)}{4}, \quad T_1(q) = e^{i\phi} \frac{U_{N, N \pm 1, N N}(\mathbf{q})}{4}, \quad (3.36)$$

где в определении для $T_1(q)$ множитель $e^{i\phi}$ добавлен, чтобы сократить зависимость величины $U_{N, N-1, N, N}(\mathbf{q})$ от угла ϕ между направлением вектора

$\mathbf{q}$ и осью x (см. раздел 3.7). Матричный элемент $a(q)$ является еще функцией модуля волнового вектора q , температуры T и ширины уровня Ландау τ^{-1} и определен как

$$a(T, \tau^{-1}, q) = 1 + 4T \sum_{\omega_n} \frac{n_L T_0(q) G_N^2(\omega_n)}{1 + g\pi^{\omega_n}(0, q)}. \quad (3.37)$$

Функция $\xi(q)$ выражается через характерные энергии

$$\xi(q) = \frac{T_0(q)}{2T_1(q)} - \frac{1}{2}. \quad (3.38)$$

Собственные значения матрицы 2×2 в выражении (3.35) легко находятся и равны

$$\lambda_{\pm}(q) = a(q) + \xi(q) \pm \sqrt{[a(q)]^2 + [\xi(q)]^2} \quad (3.39)$$

Оказывается, что $\lambda_+(q)$ при всех $a(q)$ того же знака, что $\xi(q)$, а $\lambda_-(q)$ меняет знак при $a(q) = 0$. Таким образом, условие возникновения неустойчивости остается таким же как, если бы рассматривался только один параметр порядка $\Delta(\mathbf{q})$, как это и делалось в предыдущей главе. Как показано в разделе 3.7, характерная энергия $T_1(q)$ оказывается порядка $T_0(q)/N \ll T_0(q)$. Поэтому можно считать, что $\xi(q) \gg a(q)$. Тогда находим, что

$$\Omega^{(2)} = \frac{n_L S^2}{2T} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} T_0(q) \left[a(q) \left(1 - \frac{T_1(q)}{T_0(q)} a(q) \right) \Delta_-(\mathbf{q}) \Delta_-(-\mathbf{q}) + \frac{T_1(q)}{T_0(q)} \Delta_+(\mathbf{q}) \Delta_+(-\mathbf{q}) \right], \quad (3.40)$$

где

$$\Delta_-(\mathbf{q}) = \Delta(\mathbf{q}) - \left(\frac{T_1(q)}{T_0(q)} \right)^2 a(q) \varphi(\mathbf{q}), \quad \Delta_+(\mathbf{q}) = \varphi(\mathbf{q}) + a(q) \Delta(\mathbf{q}). \quad (3.41)$$

Очевидно, что минимуму свободной энергии¹ отвечает $\Delta_+(q) = 0$. Пренебрегая тогда отличием порядка $\mathcal{O}(1/N^2)$ величины $\Delta_-(q)$ от $\Delta(q)$, окончательно получаем, что

$$\Omega^{(2)} = \frac{n_L S^2}{2T} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} T_0(q) a(q) \left(1 - \frac{T_1(q)}{T_0(q)} a(q) \right) \Delta(\mathbf{q}) \Delta(-\mathbf{q}). \quad (3.42)$$

¹В квадратичном по параметру порядка $\Delta_{p_1 p_2}(\mathbf{Q})$ приближении добавка к свободной энергии равна добавке к термодинамическому потенциалу.

Таким образом, учет возможности возбуждения параметров порядка $\Delta_{p_1 p_2}(\mathbf{q})$ с p_1 и p_2 отличными от N , приводит к поправкам к термодинамическому потенциалу порядка $\mathcal{O}(1/N)$. В дальнейшем будем пренебрегать ими и считать, что

$$\Delta_{p_1 p_2}(\mathbf{q}) = \Delta(\mathbf{q}) \delta_{p_1 N} \delta_{p_2 N}. \quad (3.43)$$

3.2.6 Трехуровневая модель

Результаты предыдущего раздела позволяют окончательно сформулировать действие для трехуровневой модели. Согласно определению (3.16), волна зарядовой плотности на N -ом уровне Ландау с параметром порядка $\Delta(\mathbf{q})$ приводит к возникновению потенциала $\lambda_{N, N\pm 1}(\mathbf{q})$, который при рассеянии переводит электроны с N -го на $(N\pm 1)$ -ый уровень Ландау. Однако сила этого потенциала порядка $T_1(q)$, а поэтому его учет приводит к поправкам порядка $\mathcal{O}(1/N)$ (см. раздел 3.7), которыми в дальнейшем будем пренебрегать. Поэтому считаем, что

$$\lambda_{p_1 p_2}(\mathbf{q}) = SU(q) F_N^{-1}(q) \Delta(\mathbf{q}) \delta_{p_1 N} \delta_{p_2 N}. \quad (3.44)$$

Таким образом, эффективное действие для трехуровневой модели принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{TL}[\delta P] = & \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} \ln G^{-1} - \frac{N_r \Omega_\Delta}{T} - \frac{1}{2g} \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} (P_{\text{sp}} + \delta P)^2 \\ & + \int d\mathbf{r} \operatorname{tr} \ln \left[1 + (i\delta P + \hat{K} + P_N \lambda P_N) G \right], \end{aligned} \quad (3.45)$$

где $P_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ обозначает проекционный оператор на N -ый уровень Ландау, определенный выражением (1.69), а

$$\Omega_\Delta = \frac{n_L S^2}{2} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} U(q) \Delta(\mathbf{q}) \Delta(-\mathbf{q}), \quad (3.46)$$

причем для краткости обозначено $U(q) \equiv U_{NNNN}(q)$.

3.3 Проводимость состояния однонаправленной волны зарядовой плотности при $T_c - T \ll T_c$

3.3.1 Тензор проводимости σ_{ab}

Эффективное действие (3.45) позволяет вычислять проводимость системы как в однородном состоянии, так и в состоянии волны зарядовой плотности. Наиболее интересен случай уровня Ландау, заполненного на половину, когда, как было показано в предыдущей главе, образуется состояние однонаправленной волны зарядовой плотности при $T < T_c$. Параметр порядка для однонаправленной волны зарядовой плотности имеет вид [69]

$$\Delta(\mathbf{q}) = \frac{(2\pi)^2}{S} \Delta \left[\delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}_0) + \delta(\mathbf{q} + \mathbf{Q}_0) \right], \quad (3.47)$$

где вектор $\mathbf{Q}_0$, характеризующий период и направление однонаправленной волны зарядовой плотности может быть ориентирован в произвольном направлении. Обычно, его ориентация фиксируется либо внутренней анизотропией, либо небольшим магнитным полем, приложенным параллельно двумерному слою [13, 14, 15, 16, 89]. Будем предполагать, что вектор $\mathbf{Q}_0$ направлен под углом ϕ к оси x . Напомним, что модуль вектора $\mathbf{Q}_0$ равен $Q_0 = r_0/R_c$, где $r_0 \approx 2.4$ – это первый нуль функции Бесселя $J_0(x)$.

Для определения тензора проводимости $\sigma_{ab}(\omega) \equiv \sigma_{ab}(\omega, q = 0)$, как известно [44], удобно пользоваться Матцубаровской техникой, т.е. вычислять проводимость $\sigma_{ab}(i\nu_n)$ на мнимых дискретных частотах $\nu_n = 2\pi T n$. Для перехода к проводимости $\sigma_{ab}(\omega)$ на вещественной частоте ω надо выполнить аналитическое продолжение с верхней мнимой полуоси ($\nu_n > 0$) на вещественную ось: $i\nu_n \rightarrow \omega$.

Для вычисления тензора проводимости $\sigma_{ab}(i\nu_n)$ удобно записать стандартную формулу Кубо [44], как вторую вариационную производную от логарифма эффективного действия по независящему от $\mathbf{r}$ вектор-потенциалу

$\mathbf{a}(\nu_n)$ [26, 27],

$$\sigma_{ab}(i\nu_n) = \frac{\pi T}{SN_r \nu_n} \frac{\delta^2}{\delta a_a(\nu_n) \delta a_b(-\nu_n)} \ln \int \mathcal{D}\delta P I[\delta P] \exp \mathcal{S}_{TL}[\delta P] \Big|_{\mathbf{a}=0}. \quad (3.48)$$

Отметим, что выражение (3.48) соответствует тому, что в эффективном действии для вектор-потенциала $\mathbf{a}(\nu_n)$ имеется член $\mathbf{j}(\nu_n)\mathbf{a}(-\nu_n)$, где $\mathbf{j}(\nu_n)$ обозначает фурье-компоненту тока.

Можно проверить, что вклад первого порядка по параметру порядка $\Delta(\mathbf{q})$ в проводимость обращается в нуль. Это происходит потому, что однонаправленная волна зарядовой плотности образуется на ненулевом векторе $\mathbf{Q}_0$. Таким образом, первая неисчезающая добавка к проводимости однородного состояния $\sigma_{ab}^{(0)}$ оказывается второго порядка по Δ . Для того, чтобы найти ее, необходимо разложить действие $\mathcal{S}_{TL}[\delta P]$ до второго порядка как по потенциалу $\lambda(\mathbf{r})$, так и по $\hat{K}$, а затем проинтегрировать по полям $\delta P(\mathbf{r})$. Технически это аналогично вычислениям, представленным в предыдущей главе. Нужно заменить $\lambda(\mathbf{r})$ на $P_N \lambda P_N + \hat{K}$ и учитывать наличие трех уровней Ландау вместо одного. Тогда раскладывая действие $\mathcal{S}_{TL}[\delta P]$ до четвертого порядка по $P_N \lambda P_N + \hat{K}$ и выделяя член второго порядка как по λ , так и по $\hat{K}$, найдем три вида вкладов в тензор проводимости состояния однонаправленной волны зарядовой плотности. Диаграммы, соответствующие им в стандартной “крестовой” технике представлены на Рис. 3.1.

Первые две диаграммы (Рис. 3.1(a)) соответствуют следующему вкладу в проводимость

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}^{(a)}(i\nu_n) = & -\frac{8\pi\omega_H}{m\nu_n} T \sum_{\omega_n} \frac{G_N^3(\omega_n)}{1 + g\pi_0^{\omega_n}(0, 0)} \frac{T_0^2 \Delta^2}{(1 + g\pi_0^{\omega_n}(0, Q_0))^2} \\ & \times \sum_p D_{Np}^a D_{pN}^b G_p(\omega_n + \nu_n). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Здесь символ D_{Np}^a обозначает матричный элемент ковариантной

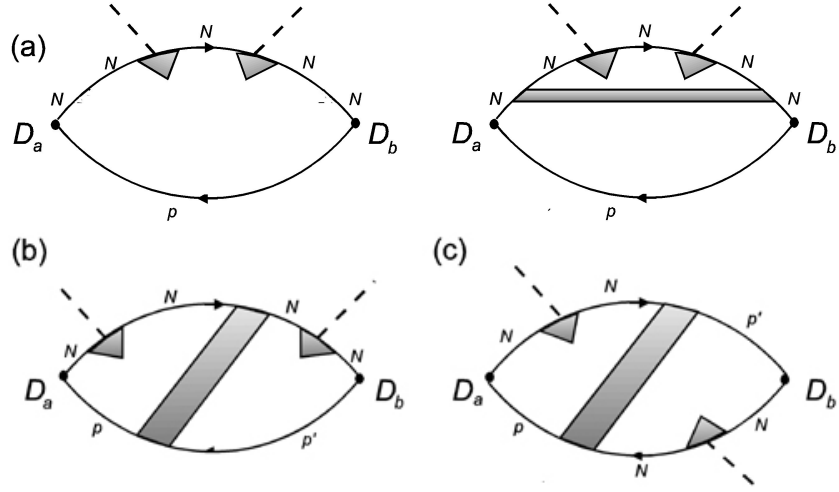


Рис. 3.1: Диаграммы для поправок к проводимости $\sigma_{ab}^{(0)}$. Сплошные линии обозначают функции Грина, $N/p/p'$ обозначают номера уровней Ландау, прерывистые линии – это потенциал $\lambda(\mathbf{r})$, заштрихованные блоки – это лестница из примесных линий.

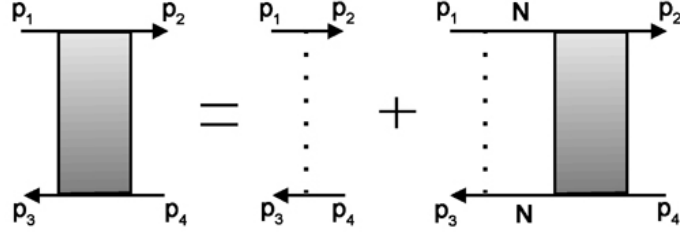


Рис. 3.2: Лестница из примесных линий. Частота $\omega_n + \nu_n$ бежит справа налево, а ω_n наоборот.

производной,

$$D_{Np}^a = \int d\mathbf{r} \phi_{Nk}^*(\mathbf{r}) D_a \phi_{pk}(\mathbf{r}) = \sqrt{n_L} \left[\gamma^a \sqrt{N+1} \delta_{p,N+1} + \beta^a \sqrt{N} \delta_{p,N-1} \right], \quad (3.50)$$

причем

$$\gamma^x = i, \quad \gamma^y = 1, \quad \beta^x = -i, \quad \beta^y = 1. \quad (3.51)$$

Оказывается, что выражение (3.49) дает только изотропную поправку к проводимости, т.е. $\sigma_{xx}^{(a)} = \sigma_{yy}^{(a)}$ и $\sigma_{xy}^{(a)} = -\sigma_{yx}^{(a)}$, причем зависимости от направления волны зарядовой плотности (от угла ϕ) не возникает.

$I_{N,N-1,N-1,N} = gn_L \mathcal{J}_0^2(r_0)$	$I_{N,N+1,N+1,N} = gn_L \mathcal{J}_0^2(r_0)$
$I_{N,N-1,N,N+1} = gn_L \mathcal{J}_1^2(r_0)$	$I_{N,N+1,N,N-1} = gn_L \mathcal{J}_1^2(r_0)$
$I_{N,N,N-1,N} = gn_L e^{i\phi} \mathcal{J}_0(r_0) \mathcal{J}_1(r_0)$	$I_{N,N+1,N,N} = gn_L e^{-i\phi} \mathcal{J}_0(r_0) \mathcal{J}_1(r_0)$
$I_{N,N-1,N,N} = -gn_L e^{i\phi} \mathcal{J}_0(r_0) \mathcal{J}_1(r_0)$	$I_{N,N,N+1,N} = -gn_L e^{-i\phi} \mathcal{J}_0(r_0) \mathcal{J}_1(r_0)$
$I_{N,N-1,N,N-1} = gn_L e^{2i\phi} \mathcal{J}_1^2(r_0)$	$I_{N,N+1,N,N+1} = gn_L e^{-2i\phi} \mathcal{J}_1^2(r_0)$
$I_{N,N-1,N+1,N} = gn_L e^{2i\phi} \mathcal{J}_1(r_0) \mathcal{J}_0(r_0)$	$I_{N,N+1,N-1,N} = gn_L e^{-2i\phi} \mathcal{J}_1(r_0) \mathcal{J}_0(r_0)$

Таблица 3.1: Выражения для $I_{p_1 p_2 p_3 p_4}(\mathbf{Q}_0)$, необходимые для вычисления выражений (3.49), (3.52) и (3.55).

Третья диаграмма (Рис. 3.1(b)) равна

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}^{(b)}(i\nu_n) &= \frac{8\pi\omega_H}{\nu_n m} T \sum_{\omega_n} \frac{G_N^4(\omega_n + \nu_n) T_0^2 \Delta^2}{(1 + g\pi_0^{\omega_n}(0, Q_0))^2} \sum_{pp'} G_p(\omega_n) G_{p'}(\omega_n) D_{pN}^a D_{Np'}^b \\ &\times \left[I_{Npp'N}(\mathbf{Q}_0) + \frac{n_L G_N(\omega_n) G_N(\omega_n + \nu_n)}{1 + g\pi_0^{\omega_n}(\nu_n, Q_0)} I_{NpNN}(\mathbf{Q}_0) I_{NNp'N}(\mathbf{Q}_0) \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Величина $I_{p_1 p_2 p_3 p_4}(\mathbf{Q})$ представляет собой примесную линию в представлении номеров уровней Ландау (см. Рис. 3.2)

$$I_{p_1 p_2 p_3 p_4}(\mathbf{Q}) = g \int_{\mathbf{q}} F_{p_1 p_2}(\mathbf{q}) F_{p_3 p_4}(-\mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{Q}l_H^2). \quad (3.53)$$

Вычисление $I_{p_1 p_2 p_3 p_4}(\mathbf{Q}_0)$ приведено в Раз. 3.8. Для удобства результаты собраны в таблице 3.1. Так как величины $I_{NNNpN}(\mathbf{Q}_0)$, $I_{NpNNN}(\mathbf{Q}_0)$ и $I_{Npp'N}(\mathbf{Q}_0)$ пропорциональны $\mathcal{J}_0(r_0) = 0$, то эта диаграмма не дает вклада в проводимость, т.е.

$$\sigma_{ab}^{(b)}(i\nu_n) = 0. \quad (3.54)$$

Последняя диаграмма (Рис. 3.1(c)) равна

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}^{(c)}(i\nu_n) &= \frac{8\pi\omega_H}{\nu_n m} T \sum_{\omega_n} \frac{G_N^2(\omega_n) G_N^2(\omega_n + \nu_n) T_0^2 \Delta^2}{(1 + g\pi_0^{\omega_n}(0, Q_0))(1 + g\pi_0^{\omega_n + \nu_n}(0, Q_0))} \\ &\times \sum_{pp'} G_p(\omega_n) G_{p'}(\omega_n + \nu_n) \frac{D_{pN}^a D_{p'N}^b I_{NpNp'}(\mathbf{Q}_0)}{1 + g\pi_0^{\omega_n}(\nu_n, Q_0)}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Члены в сумме по номерам уровней Ландау с $p = p' = N \pm 1$ приводят к анизотропным поправкам к проводимости, которые зависят от направления

волны зарядовой плотности. Члены с $p = N \pm 1$ и $p' = N \mp 1$ приводят к изотропным поправкам к проводимости.

Выражения (3.49)-(3.55) позволяют вычислить поправки, связанные с наличием волны зарядовой плотности, к тензору проводимости $\sigma_{ab} = \sigma_{ab}(\omega = 0)$ на постоянном токе. Ниже отдельно рассмотрим анизотропный и изотропный вклады в статическую проводимость σ_{ab} .

3.3.2 Анизотропная часть тензора проводимости $\sigma_{ab}^{(\text{anis})}$

Выражение (3.55) позволяет вычислить анизотропный вклад в тензор проводимости при $T_c - T \ll T_c$, где разложение по параметру порядка Δ оправдано. Отбирая члены с $p = p' = N \pm 1$ в сумме по номерам уровней Ландау в выражении (3.55), находим следующие выражения для анизотропной части тензора проводимости на постоянном токе

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx}^{(\text{anis})} \\ \sigma_{yy}^{(\text{anis})} \end{array} \right\} = \mp 4\pi N \mathcal{J}_1^2(r_0) h \left(\frac{1}{4\pi T_c \tau} \right) \Delta^2 \cos[2\phi], \quad (3.56)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xy}^{(\text{anis})} \\ \sigma_{yx}^{(\text{anis})} \end{array} \right\} = 4\pi N \mathcal{J}_1^2(r_0) h \left(\frac{1}{4\pi T_c \tau} \right) \Delta^2 \sin[2\phi]. \quad (3.57)$$

Функция $h(z)$ определена через обобщенную зета-функцию Римана как

$$h(z) = 5z^3 \frac{\zeta(6, \frac{1}{2} + z)}{[\zeta(2, \frac{1}{2} + z)]^2} = \begin{cases} \frac{4\pi^2}{3} z^3, & z \ll 1, \\ 1 - \frac{3}{z}, & z \gg 1. \end{cases} \quad (3.58)$$

При выводе асимптотических выражений для функции $h(z)$ было использовано асимптотическое выражение для обобщенной зета-функции

$$\zeta(k, z) = \frac{1}{(k-1)z^{k-1}} - \frac{1}{2z^k}, \quad z \gg 1, \quad (3.59)$$

и факт, что $\zeta(6, 1/2) = \pi^6/15$. Функция $h(z)$ монотонно возрастает от 0 до 1, как показано на Рис. 3.3.

Выражения (3.56) и (3.57) являются одним из основных результатов этой главы. Анизотропные поправки (3.56) и (3.57) оказываются пропорциональными $(T_c - T)/T_c$, так как в теории Ландау параметр порядка $\Delta \propto \sqrt{(T_c - T)/T_c}$ (см. главу 2). Угловая зависимость $\sigma_{xx}^{(\text{anis})}$ имеет минимум при $\phi = 0$, что соответствует вектору $\mathbf{Q}_0$, направленному вдоль оси x . При этом модуляция плотности вдоль оси y отсутствует. Видно, что при $\phi = 0$ проводимость $\sigma_{yy}^{(\text{anis})}$ положительная, а $\sigma_{xx}^{(\text{anis})}$ отрицательная, причем они равны по модулю. Это приводит к тому, что проводимость σ_{xx} вдоль модуляции параметра порядка меньше, чем проводимость σ_{yy} поперек. Отметим, что при $\phi = 0$ проводимость $\sigma_{xy}^{(\text{anis})}$ обращается в нуль. Если же вектор $\mathbf{Q}_0$ направлен под углом $\phi = \pi/4$ к оси x , то $\sigma_{xx}^{(\text{anis})}$ и $\sigma_{yy}^{(\text{anis})}$ равны нулю из-за симметрии между осями x и y . Наоборот, $\sigma_{xy}^{(\text{anis})}$ достигает максимума. Также необходимо отметить, что анизотропные поправки к проводимости пропорциональны N также, как и проводимость однородного состояния [2].

3.3.3 Изотропная часть тензора проводимости $\sigma_{ab}^{(\text{isot})}$

Выражения (3.49) и (3.55) позволяют вычислить изотропный вклад в тензор проводимости при $T_c - T \ll T_c$. Отбирая члены с $p = N \pm 1$, а $p' = N \mp 1$ в сумме по номерам уровней Ландау в выражении (3.55), находим следующие выражение для изотропной поправки к проводимости σ_{xx} на постоянном токе,

$$\delta\sigma_{xx}^{(\text{isot})} = -4\pi N h_{xx} \left(\frac{1}{4\pi T_c \tau} \right) \Delta^2, \quad (3.60)$$

где функция $h_{xx}(z)$ определена как

$$h_{xx}(z) = \mathcal{J}_1^2(r_0) h(z) + \frac{1}{2z\zeta(2, \frac{1}{2} + z)} \left[1 - \frac{\text{Re } \psi'(\frac{1}{2} + (1-i)z)}{\zeta(2, \frac{1}{2} + z)} \right], \quad (3.61)$$

и имеет следующие асимптотики

$$h_{xx}(z) = \begin{cases} \frac{2}{3}z, & z \ll 1, \\ \mathcal{J}_1^2(r_0) + \frac{1}{4} - \frac{3\mathcal{J}_1^2(r_0) - \frac{1}{4}}{z}, & z \gg 1. \end{cases} \quad (3.62)$$

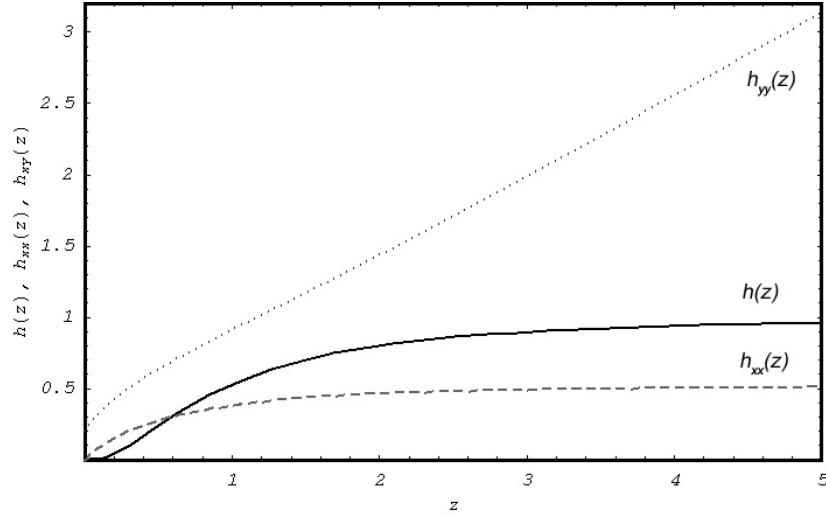


Рис. 3.3: Графики функций $h(z)$, $h_{xx}(z)$ и $h_{yy}(z)$.

Как видно из выражения (3.60), изотропная поправка $\delta\sigma_{xx}^{(\text{isot})}$ оказывается того же порядка, что и анизотропная часть тензора проводимости. Для изотропной поправки к проводимости σ_{xy} находим

$$\delta\sigma_{xy}^{(\text{isot})} = -8\pi^2 N \frac{T_c}{\omega_H} h_{xy} \left(\frac{1}{4\pi T_c \tau} \right) \Delta^2, \quad (3.63)$$

где

$$h_{xy}(z) = \left[\mathcal{J}_1^2(r_0) \left[4z^4 \zeta \left(5, \frac{1}{2} + z \right) + z^3 \zeta \left(4, \frac{1}{2} + z \right) \right] - 2h_{xx}(z) \right. \\ \left. + z \operatorname{Im} \psi' \left(\frac{1}{2} + (1-i)z \right) - \operatorname{Im} \psi \left(\frac{1}{2} + (1-i)z \right) \right] \frac{1}{z \left[\zeta \left(2, \frac{1}{2} + z \right) \right]^2}. \quad (3.64)$$

Функция $h_{xy}(z)$ имеет следующие асимптотические выражения в пределе малого и большого z

$$h_{xy}(z) = \begin{cases} \frac{2}{\pi^2} \left(1 - \frac{\pi^2 - 2\psi''(\frac{1}{2})}{\pi^2} z \right), & z \ll 1, \\ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\mathcal{J}_1^2(r_0)}{3} \right) z, & z \gg 1. \end{cases} \quad (3.65)$$

Подчеркнем, что изотропная поправка к проводимости $\sigma_{xy}^{(\text{isot})}$ содержит дополнительную малость $\max\{T_c, \tau^{-1}\}/\omega_H$ по сравнению с остальными результатами. Результаты (3.60) и (3.63) являются одними из основных результатов этой главы.

3.4 Флуктуационная проводимость

3.4.1 Флуктуации параметра порядка с учетом анизотропии

Параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ имеет смысл перевального решения для плазмонного поля, которое появляется при преобразовании Хаббарда-Стратоновича для члена с экранированным электрон-электронным взаимодействием. Разложение таких физических величин, как свободная энергия и линейный отклик, по степеням параметра порядка оправдано, если можно пренебречь его флуктуациями. Как было показано, в предыдущей главе, флуктуации приводят к тому, что переход из однородного состояния в состояние волны зарядовой плотности становится первого рода и происходит при более низкой температуре $T_c - \delta T_c$, где $\delta T_c / T_c \propto N^{-2/3} \ll 1$ (см. раздел 2.4). Изучим теперь, какой эффект оказывают эти флуктуации на тензор проводимости выше и ниже температуры перехода.

Выше предполагалось, что направление вектора $\mathbf{Q}_0$ фиксируется внутренней анизотропией или приложенным параллельно двумерному слою магнитным полем. Однако конкретный вид этой анизотропии был не важен. Теперь же необходимо его конкретизировать. Экспериментальные исследования анизотропии, которая ответственна за выбор направления, вдоль которого образуется однонаправленная волна зарядовой плотности, были выполнены в ряде работ [13, 14, 15, 16, 89]. Результат этих исследований можно объяснить, если предположить, что в потенциале Хартри-Фока $U(\mathbf{Q})$ появляются члены пропорциональные $\cos 2\phi$. При этом экспериментально установлено [89], что коэффициент при $\cos 2\phi$ зависит от плотности двумерных электронов n и при определенном ее значении n_* обращается в нуль. В этой точке становится важным следующий член в энергии анизотропии пропорциональный $\cos 4\phi$. Отметим, что появление члена $\cos 2\phi$ в энергии анизотропии до сих пор не объяснено теоретически.

Более того, член вида $\cos 2\phi$ запрещен симметрией объемного кристалла $GaAs$ и физическое происхождение его до сих пор не известно [15]. Член пропорциональный $\cos 4\phi$ может быть получен теоретически, как результат учета пьезоэлектрической природы объемного кристалла $GaAs$ [91, 92]. Ниже будем рассматривать случай общего положения, когда электронная плотность $n \neq n_*$ и член пропорциональный $\cos 4\phi$ не важен. Отметим, что типичное значение энергии анизотропии E_A порядка 1 mK , как показывает эксперимент [15]. Для того, чтобы учесть наличие анизотропии количественно, заменим величину $T_0(Q)$ (см. (3.36)) вблизи $Q = Q_0$ на

$$T_0(Q) + E_A \frac{1 - \cos 2\phi}{2}. \quad (3.66)$$

Отметим, что это выражение имеет минимум при $\phi = 0$.

При $T > T_c$ параметр порядка волны зарядовой плотности равен в среднем нулю $\langle \Delta \rangle = 0$, но среднее значение его квадрата отлично от нуля $\langle \Delta^2 \rangle \neq 0$. Этот факт приводит к появлению поправки к тензору проводимости в однородном состоянии, благодаря наличию слабых корреляций, соответствующих состоянию волны зарядовой плотности. Отметим, что эти флуктуационные поправки к тензору проводимости аналогичны поправкам к проводимости нормального металла из-за сверхпроводящего спаривания выше критической температуры [93].

Флуктуационная поправка к тензору проводимости может быть найдена с помощью замены Δ^2 на $\langle \Delta(\mathbf{Q})\Delta(-\mathbf{Q}) \rangle$ в выражениях (3.56), (3.57), (3.60) и (3.63) и последующем усреднении по всем волновым векторам $\mathbf{Q}$. С учетом выражения (3.66) функция Грина для параметра порядка может быть найдена из (2.81) и равна

$$\langle \Delta(\mathbf{Q})\Delta(-\mathbf{Q}) \rangle = \frac{T_c}{4T_0 n_L} \left[\frac{T - T_c}{T_c} + \gamma \left(\frac{1}{4\pi T_c \tau} \right) (q - Q_0)^2 R_c^2 + \eta \sin^2 \phi \right]^{-1}, \quad (3.67)$$

где безразмерный параметр $\eta = E_A/T_0$, а функция

$$\gamma(z) = \beta_1 + \mathcal{J}_1^2(r_0) z^2 \frac{\zeta(4, \frac{1}{2} + z)}{\zeta(2, \frac{1}{2} + z)}, \quad (3.68)$$

причем постоянная $\beta_1 \approx 2.58$ определена в выражении (2.85). После интегрирования по модулю вектора $\mathbf{Q}$ получим, что в выражениях (3.56), (3.57), (3.60) и (3.63) должна быть сделана замена

$$\begin{aligned} f(\phi) \Delta^2 &\longrightarrow \frac{r_0}{4\pi N} \zeta\left(2, \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T_c \tau}\right) \left[\gamma\left(\frac{1}{4\pi T_c \tau}\right)\right]^{-1/2} \\ &\times \sqrt{\frac{T_c}{T - T_c}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{f(\phi)}{\sqrt{1 + \eta \frac{T_c}{T - T_c} \sin^2 \phi}}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Отметим, что как обычно, чтобы из формул для $T > T_c$ получить формулы для случая $T < T_c$ нужно заменить $(T - T_c)/T_c$ на $2(T_c - T)/T_c$.

3.4.2 Флуктуационные поправки к анизотропной части тензора проводимости $\sigma_{ab}^{(\text{anis})}$

Производя интегрирование по углу ϕ в выражении (3.69) с $f(\phi) = \cos 2\phi$, находим следующие флуктуационные поправки к анизотропной части тензора проводимости

$$\left. \begin{aligned} \delta\sigma_{xx}^{(\text{anis-f})} \\ \delta\sigma_{yy}^{(\text{anis-f})} \end{aligned} \right\} = \mp r_0 \mathcal{J}_1^2(r_0) H\left(\frac{1}{4\pi T_c \tau}\right) \begin{cases} \sqrt{\frac{T_c}{2(T_c - T)}} F_A\left(\frac{\eta T_c}{2(T_c - T)}\right), & T < T_c, \\ \sqrt{\frac{T_c}{T - T_c}} F_A\left(\frac{\eta T_c}{T - T_c}\right), & T > T_c. \end{cases} \quad (3.70)$$

Здесь функция $H(z)$ выражается через функцию $h(z)$ как

$$H(z) = \frac{\zeta(2, \frac{1}{2} + z) h(z)}{\sqrt{\gamma(z)}} = \begin{cases} \frac{2\pi^4}{3\sqrt{\beta_1}} z^3, & z \ll 1, \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\mathcal{J}_1^2(r_0) + 3\beta_1}} \frac{1}{z}, & z \gg 1. \end{cases} \quad (3.71)$$

Заметим, что так как функция $h(z)$ монотонно возрастает, а функция $\zeta(2, \frac{1}{2} + z) / \sqrt{\gamma(z)}$ монотонно убывает, то в результате функция $H(z)$ имеет

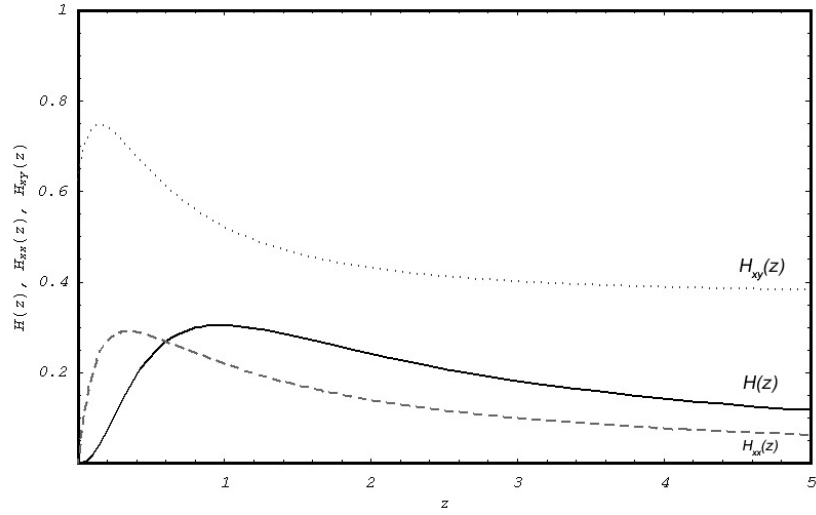


Рис. 3.4: Графики функций $H(z)$, $H_{xx}(z)$ и $H_{xy}(z)$.

максимум при $z \approx 0.97$ (см. Рис. 3.4). Функция $F_A(x)$ определяется через полные эллиптические интегралы первого и второго рода,

$$F_A(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right) K(i\sqrt{x}) - \frac{2}{x} E(i\sqrt{x}) \right] = \begin{cases} \frac{x}{8}, & x \ll 1, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{x}} \ln 16e^{-4}x, & x \gg 1. \end{cases} \quad (3.72)$$

Интеграл по углу ϕ в выражении (3.69) с $f(\phi) = \sin 2\phi$ обращается в нуль, поэтому анизотропные флуктуационные поправки к компонентам σ_{xy} и σ_{yx} тензора проводимости отсутствуют.

Подчеркнем, что выражение (3.70) является одним из основных результатов этой главы.

3.4.3 Флуктуационные поправки к изотропной части тензора проводимости $\sigma_{ab}^{(\text{isot})}$

Производя интегрирование по углу ϕ в выражении (3.69) с $f(\phi) = 1$, находим следующие флуктуационные поправки к изотропной части тензора

проводимости

$$\delta\sigma_{xx}^{(\text{isot-f})} = -r_0 H_{xx} \left(\frac{1}{4\pi T_c \tau} \right) \begin{cases} \sqrt{\frac{T_c}{2(T_c - T)}} F_I \left(\frac{\eta T_c}{2(T_c - T)} \right), & T < T_c, \\ \sqrt{\frac{T_c}{T - T_c}} F_I \left(\frac{\eta T_c}{T - T_c} \right), & T > T_c, \end{cases} \quad (3.73)$$

и

$$\delta\sigma_{xy}^{(\text{isot-f})} = -\frac{2\pi r_0 T_c}{\omega_H} H_{xy} \left(\frac{1}{4\pi T_c \tau} \right) \begin{cases} \sqrt{\frac{T_c}{2(T_c - T)}} F_I \left(\frac{\eta T_c}{2(T_c - T)} \right), & T < T_c, \\ \sqrt{\frac{T_c}{T - T_c}} F_I \left(\frac{\eta T_c}{T - T_c} \right), & T > T_c. \end{cases} \quad (3.74)$$

Здесь функции $H_{xx}(z)$ и $H_{xy}(z)$ выражаются через функции $h_{xx}(z)$ и $h_{xy}(z)$ соответственно,

$$H_{xx}(z) = \frac{\zeta(2, \frac{1}{2} + z) h_{xx}(z)}{\sqrt{\gamma(z)}} = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3\sqrt{\beta_1}} z, & z \ll 1, \\ \frac{\sqrt{3}(1 + 4\mathcal{J}_1^2(r_0))}{4\sqrt{\mathcal{J}_1^2(r_0) + 3\beta_1}} \frac{1}{z}, & z \gg 1, \end{cases} \quad (3.75)$$

$$H_{xy}(z) = \frac{\zeta(2, \frac{1}{2} + z) h_{xy}(z)}{\sqrt{\gamma(z)}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \left(1 - \frac{\pi^2 - 2\psi''(\frac{1}{2})}{\pi^2} z \right), & z \ll 1, \\ \frac{3\pi - 8\mathcal{J}_1^2(r_0)}{4\sqrt{3}\sqrt{\mathcal{J}_1^2(r_0) + 3\beta_1}}, & z \gg 1. \end{cases} \quad (3.76)$$

Отметим, что функции $H_{xx}(z)$ и $H_{xy}(z)$ имеют максимум при значениях z равных 0.34 и 0.16 соответственно, как показано на Рис. 3.4. Функция $F_I(x)$ определяется с помощью полного эллиптического интеграла первого рода как

$$F_I(x) = \frac{2}{\pi} K(i\sqrt{x}) = \begin{cases} 1, & x \ll 1, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{x}} \ln 16x, & x \gg 1, \end{cases}. \quad (3.77)$$

Подчеркнем, что выражения (3.75)-(3.76) являются одними из основных результатов этой главы.

3.4.4 Пределы применимости результатов (3.70), (3.75) и (3.76)

Выражения (3.70), (3.74) и (3.75) расходятся при $T \rightarrow T_c$. Это означает, что эти результаты не применимы вблизи T_c . Предел применимости определяется тем требованием, что флуктуационная проводимость должна быть мала по сравнению с проводимостью однородного состояния, равной [2]

$$\sigma_{xx}^{(0)} = \frac{2N}{\pi}, \quad \sigma_{xy}^{(0)} = N. \quad (3.78)$$

Покажем, что условие малости флуктуационной проводимости и условие малости отклонения $|T_c - T| \ll T_c$ совместны. Рассмотрим сначала флуктуационную поправку (3.74) к проводимости σ_{xx} . Исходя из того, что максимальное значение функции $F_I(x)$ равно 1, а функции $H_{xx}(z)$ приблизительно 0.3 (см. Рис. 3.4), и используя выражение (3.78), находим, что

$$1 \gg \frac{|T_c - T|}{T_c} \gg \frac{1}{N^2}, \quad (3.79)$$

причем справа приведено максимально возможное значение. Как видно, в пределе $N \gg 1$ неравенство (3.79) не противоречиво. Анализ выражения (3.70) для флуктуационных поправок к анизотропной части проводимости дает аналогичную оценку. Флуктуационная поправка (3.75) к проводимости σ_{xy} содержит дополнительную малость T_c/ω_H , поэтому условие применимости полученных выше выражений для флуктуационных поправок определяется неравенством (3.79).

3.5 Обсуждение полученных результатов

Выше был получен ряд результатов для тензора проводимости двумерных взаимодействующих электронов на высоком уровне Ландау при половинном заполнении. Было показано, что ниже температуры T_c фазового перехода в состояние однонаправленной волны зарядовой плотности появляется

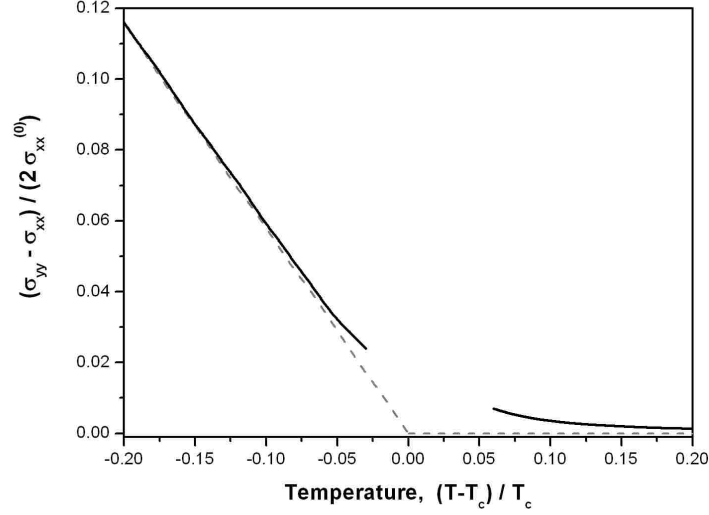


Рис. 3.5: Зависимость анизотропной части проводимости $(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})/2\sigma_{xx}^{(0)}$ при значениях параметров $1/4\pi T_c \tau = 0.24$, $\eta = 0.01$ и $N = 2$. Прерывистая линия показывает результат (3.56), который не учитывает флуктуационные поправки.

анизотропная часть тензора проводимости, которая при $(T_c - T)/T_c \ll 1$ пропорциональна отклонению температуры от критической, $T_c - T$. Как показано на Рис. 3.5, это приводит к излому в температурной зависимости анизотропной части проводимости в точке перехода $T = T_c$. Учет флуктуаций параметра порядка, как выше, так и ниже T_c , приводит к сглаживанию излома (см. Рис. 3.5).

Результаты, полученные выше, были найдены для случая дельта-коррелированного случайного потенциала. В случае случайного потенциала с длиной корреляции $d \neq 0$ можно утверждать, что температурные зависимости во всех полученных выше результатах останутся такими же, а изменятся только коэффициенты перед ними, которые теперь будут зависеть не только от $1/4\pi T_c \tau$, но и от параметра d/l_H .

В экспериментах [11, 12] изучалась зависимость сопротивлений R_{xx} и R_{yy} от температуры при факторе заполнения $\nu = 9/2$ (см. Рис. 3.6). К сожалению, специально вопрос о виде зависимости сопротивления от температуры вблизи температуры, при которой появляется различие

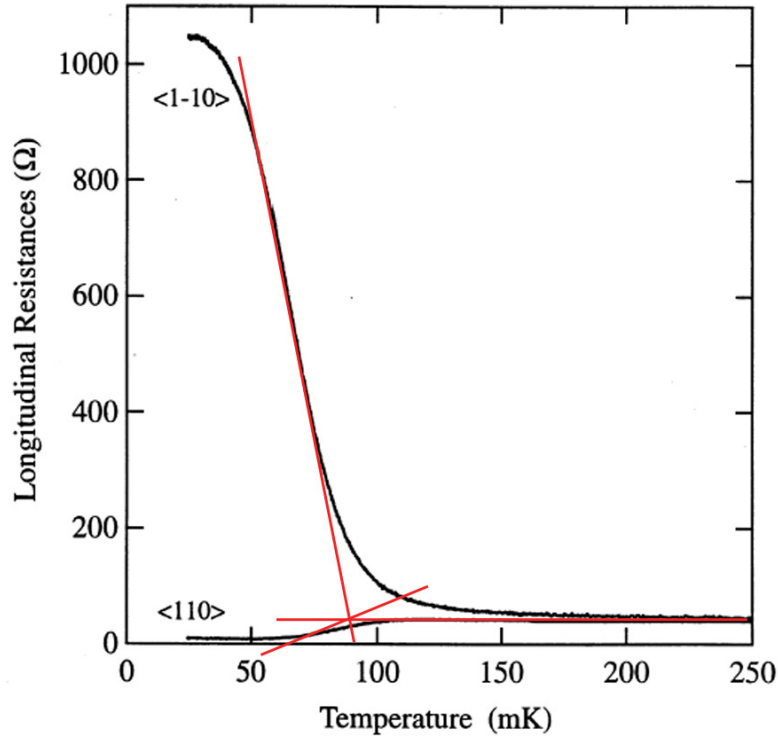


Рис. 3.6: Зависимость компонент R_{xx} и R_{yy} тензора сопротивления от температуры при $\nu = 9/2$. Рисунок взят из работы [86]. Прямые линии проведены для качественного сравнения с Рис. 3.5.

между R_{xx} и R_{yy} , не исследовался. Однако, как видно из Рис. 3.6, в температурной зависимости сопротивлений R_{xx} и R_{yy} имеется участок, по всей видимости, с линейной зависимостью от температуры. При высоких температурах сопротивления R_{xx} и R_{yy} одинаковы и от температуры не зависят. Температурная зависимость сопротивлений R_{xx} и R_{yy} вблизи 100 mK , как видно из Рис. 3.6, качественно похожа на теоретическую зависимость вблизи T_c (см. Рис. 3.5). Таким образом, можно утверждать, что теоретические результаты, полученные выше, находятся в качественном согласии с экспериментальными, однако для выяснения количественного согласия необходимы дальнейшие экспериментальные исследования.

Качественно полученная выше угловая зависимость анизотропной части тензора проводимости (см. (3.56) и (3.57)) соответствует результатам экспериментов [11, 12, 86]. Если ток течет в направлении вдоль модуляции

плотности в состоянии однонаправленной волны зарядовой плотности, то проводимость (сопротивление) оказывается меньше (больше), чем проводимость (сопротивление) в случае, когда ток протекает в направлении перпендикулярном к модуляции. При этом в обоих случаях Холловская проводимость (сопротивление) остается практически одинаковой.

Заметим, что состояние однонаправленной волны зарядовой плотности существует также при факторе заполнения уровня Ландау вблизи половины (см. раздел 2.3.3). При этом температурные зависимости не изменятся, а коэффициенты станут зависеть не только от $1/4\pi T_c \tau$, но и от величины μ_N/T_c . При дальнейшем увеличении химического потенциала μ_N состояние однонаправленной волны зарядовой плотности перейдет в состояние треугольной волны зарядовой плотности, в котором есть три основных вектора $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ и $\mathbf{Q}_3$, направленные под углами ϕ , $\phi+2\pi/3$ и $\phi+4\pi/3$ к оси x соответственно. Однако в силу простого тождества

$$1 + e^{2\pi i/3} + e^{-2\pi i/3} = 0 \quad (3.80)$$

вклады в анизотропную часть тензора проводимости от трех векторов $\mathbf{Q}_i$ взаимно сократятся. Поэтому в состоянии треугольной волны зарядовой плотности тензор проводимости остается изотропным, во всяком случае в первом порядке по квадрату параметра порядка.

Необходимо отметить, что физически анизотропная проводимость $\sigma_{ab}^{(\text{anis})}$ в состоянии однонаправленной волны зарядовой плотности, полученная выше (см. (3.56) и (3.57)), возникает из-за индуцированного периодического в одном направлении потенциала $\lambda(\mathbf{r})$ в действии (3.45). Анизотропия тензора проводимости двумерного электронного газа в слабом магнитном поле при наложении однонаправленного периодического потенциала² экспериментально была измерена 15 лет назад Вейссом, фон Клитцингом, Плоогом и Вайманном при температурах в несколько градусов

²Так называемые, осцилляции Вейсса.

Кельвина на гетероструктурах с подвижностью $\mu_0 \sim 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ [94]. Теоретически влияние однонаправленного периодического потенциала на тензор проводимости двумерного электронного газа в слабом магнитном исследовалось как на основе кинетического уравнения Больцмана [96, 99], так и методами диаграмной техники [95, 97, 98]. Важное отличие потенциала $\lambda(\mathbf{r})$, индуцированного однонаправленной волной зарядовой плотности, от внешнего приложенного периодического потенциала, это то, что потенциал $\lambda(\mathbf{r})$ возникает только на N -ом уровне Ландау, а внешний потенциал чувствуют электроны на всех уровнях Ландау.

3.6 Заключение

Для системы двумерных взаимодействующих электронов в присутствии *слабого* беспорядка и *слабого* магнитного поля был исследован вопрос о проводимости состояния однонаправленной волны зарядовой плотности при половинном заполнении уровня Ландау. В рамках разложения по параметру порядка состояния однонаправленной волны зарядовой плотности было найдено, что при $T_c - T \ll T_c$ у тензора проводимости появляется анизотропная часть, пропорциональная $(T_c - T)/T_c$. Также было найдено, что непосредственно вблизи T_c (как выше, так и ниже) флуктуации параметра порядка приводят к флуктуационным добавкам в анизотропную часть тензора проводимости, которые сглаживают излом при $T = T_c$. Полученные результаты находятся в качественном согласии с экспериментом.

3.7 Приложение: Вычисление характерной температуры T_1

Согласно выражениям (3.36) и (3.17) характерная энергия $T_1(q)$ имеет вид

$$T_1(q) = -n_L e^{i\phi} \left(U_{\text{scr}}(q) \mathcal{J}_0(qR_c) \mathcal{J}_1(qR_c) e^{-i\phi} - \sqrt{2N} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2 n_L} e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{p}l_H^2} U_{\text{scr}}(p) \right. \\ \left. \times \frac{p_x - ip_y}{p^2 l_H} L_{NN} \left(\frac{p^2 l_H^2}{2} \right) L_{N,N-1} \left(\frac{p^2 l_H^2}{2} \right) e^{-p^2 l_H^2 / 2} \right). \quad (3.81)$$

Здесь мы воспользовались выражениями (2.9) и (2.10) для форм-фактора $F_{NN}(q)$, и учли, что

$$F_{N,N-1}(\mathbf{Q}) = \sqrt{2N} \frac{q_x - iq_y}{q^2 l_H} e^{-q^2 l_H^2 / 4} L_{N,N-1} \left(\frac{q^2 l_H^2}{2} \right) \approx e^{-i\phi} \mathcal{J}_1(qR_c), \quad qR_c \ll 2N. \quad (3.82)$$

При $q = Q_0 = r_0/R_c$ в силу тождества $\mathcal{J}_0(r_0) = 0$ первый член в выражении (3.81) обращается в нуль, и величина $T_1 = T_1(Q_0)$ равна

$$T_1 = \frac{r_s \omega_H}{4\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dx}{\tilde{\epsilon}(x)} \frac{\mathcal{J}_1(4Nx) \mathcal{J}_0(4Nx)}{\sqrt{1-x^2}} \mathcal{J}_1(2r_0 x), \quad (3.83)$$

где

$$\tilde{\epsilon}(x) = 1 + \frac{r_s}{x\sqrt{2}} (1 - \mathcal{J}_0^2(4Nx)). \quad (3.84)$$

Производя вычисление интеграла, находим, что

$$T_1 = \frac{r_s \omega_H}{16\pi N \sqrt{2}} \left[\frac{r_0}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2} r_0 r_s} \right) + \frac{c_2}{1 + \sqrt{2} r_0 r_s} \right], \quad (3.85)$$

где постоянная c_2 определяется как

$$c_2 = \sqrt{\frac{r_0}{\pi}} \int_{1/2r_0}^1 \frac{dx}{x \sqrt{x(1-x^2)}} \sin \left(2r_0 x - \frac{\pi}{4} \right) \approx 1.097. \quad (3.86)$$

Из выражения (3.85) видно, что характерная температура $T_1 \sim T_0/N$.

3.8 Приложение: Вычисление величин $I_{p_1 p_2 p_3 p_4}(\mathbf{Q}_0)$

Используя определение (3.53) для величин $I_{p_1 p_2 p_3 p_4}(\mathbf{Q}_0)$ и выражение (3.82) для форм-фактора, в пределе $N \gg 1$ находим, что

$$\begin{aligned}
I_{N,N-1,N-1,N} = I_{N,N+1,N+1,N} &= gn_L N \int_0^\infty \frac{dx}{x} [L_N^{-1}(x)]^2 e^{-x} \mathcal{J}_0(r_0 \sqrt{2x}), \\
I_{N,N-1,N,N+1} = I_{N,N+1,N,N-1} &= gn_L N \int_0^\infty \frac{dx}{x} L_N^{-1}(x) L_{N+1}^{-1}(x) e^{-x} \mathcal{J}_0(r_0 \sqrt{2x}), \\
I_{N,N,N,N-1} = -I_{N,N,N,N+1} &= gn_L e^{i\phi} \sqrt{N} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} L_N^{-1}(x) L_N(x) e^{-x} \mathcal{J}_1(r_0 \sqrt{2x}), \\
I_{N,N+1,N,N} = -I_{N,N+1,N,N} &= gn_L e^{-i\phi} \sqrt{N} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} L_{N+1}^{-1}(x) L_N(x) e^{-x} \mathcal{J}_1(r_0 \sqrt{2x}), \\
I_{N,N-1,N,N-1} = I_{N,N+1,N,N+1}^* &= gn_L e^{2i\phi} N \int_0^\infty \frac{dx}{x} [L_N^{-1}(x)]^2 e^{-x} \mathcal{J}_2(r_0 \sqrt{2x}), \\
I_{N,N-1,N+1,N} = I_{N,N+1,N-1,N}^* &= gn_L e^{2i\phi} N \int_0^\infty \frac{dx}{x} L_N^{-1}(x) L_{N+1}^{-1}(x) e^{-x} \mathcal{J}_2(r_0 \sqrt{2x}).
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Далее используя асимптотическое выражение для полиномов Лагерра [100]

$$L_N^\alpha(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{x/2} \left(\frac{N}{x} \right)^{(2\alpha-1)/4} \cos \left(2\sqrt{Nx} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad N \gg 1, \tag{3.88}$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
I_{N,N-1,N-1,N} = I_{N,N+1,N+1,N} &= gn_L \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx \frac{\mathcal{J}_0(2r_0x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\
I_{N,N-1,N,N+1} = I_{N,N+1,N,N-1} &= gn_L \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx (1-2x^2) \frac{\mathcal{J}_0(2r_0x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\
I_{N,N,N,N-1} = -I_{N,N,N,N+1} &= gn_L e^{i\phi} \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx x \frac{\mathcal{J}_1(2r_0x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\
I_{N,N+1,N,N} = -I_{N,N+1,N,N} &= gn_L e^{-i\phi} \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx x \frac{\mathcal{J}_1(2r_0x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\
I_{N,N-1,N,N-1} = I_{N,N+1,N,N+1}^* &= gn_L e^{2i\phi} \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx \frac{\mathcal{J}_2(2r_0x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\
I_{N,N-1,N+1,N} = I_{N,N+1,N-1,N}^* &= gn_L e^{2i\phi} \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx (1-2x^2) \frac{\mathcal{J}_2(2r_0x)}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Интегралы, стоящие в правых частях выражений в (3.89), вычисляются с помощью тождества [100]

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\phi \cos(2\mu\phi) \mathcal{J}_{2\nu}(2r_0 \cos \phi) = \mathcal{J}_{\nu+\mu}(r_0) \mathcal{J}_{\nu-\mu}(r_0), \tag{3.90}$$

что в итоге приводит для $I_{p_1 p_2 p_3 p_4}$ к выражениям, представленным в таблице 3.1.

Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

Для системы взаимодействующих двумерных электронов, находящихся в слабом магнитном поле, когда заполнено много уровней Ландау, и в присутствии случайного потенциала:

1. Построена низкоэнергетическая теория, позволяющая описывать динамику системы, с помощью эффективного действия для электронов, находящихся на последнем из заполненных уровне Ландау. Это становится возможно благодаря частичному экранированию кулоновского взаимодействия между электронами на последнем из заполненных уровне Ландау электронами с полностью заполненных уровней. Показано, что наличие случайного потенциала уменьшает эффект экранирования. В рамках этой теории вычислен g -фактор системы, как функции магнитного поля, ширины уровня Ландау и параметра взаимодействия r_s . Исследованно влияние случайного потенциала на спектр спиновых волн. Показано, что его наличие уменьшает энергию спиновых волн, но качественный вид спектра не меняется. Найдено, что в присутствии случайного потенциала спиновые волны имеют затухание, причем в широком диапазоне значений волнового вектора затухание оказывается порядка $\ln(\sqrt{2}r_s N)/(4N\tau)$. Также исследованно туннелирование электрона на высокий уровень Ландау, заполненный на половину. Получено, что в этом случае щель в туннельной плотности состояний пропорциональна $\omega_H^{3/2}/E_F\tau_0^{1/2}$.

2. Исследован вопрос об образовании состояния волны зарядовой плотности на последнем из заполненных уровне Ландау, с учетом наличия случайного потенциала. Вычислено разложение свободной энергии по параметру порядка состояния волны зарядовой плотности. Найдена фазовая диаграмма системы. Оказалось, что вблизи половинного заполнения уровня Ландау выгодно состояние однонаправленной волны зарядовой плотности, а вдалеке состояние треугольной волны зарядовой плотности. Показано, что наличие случайного потенциала существенно ограничивает область возможного существования состояний волны зарядовой плотности: ширина уровня Ландау должна быть меньше, чем $1/2\tau_c = 4T_0/\pi$. Также показано, что наличие случайного потенциала может приводить к изменению периода волны зарядовой плотности, по-сравнению с чистым случаем. Исследованно влияние флуктуаций параметра порядка в рамках одномодового приближения (слабая кристаллизация), исходя из чего, оценена критическая область вблизи фазового перехода. Она оказывается малой в меру малости величины $N^{-2/3} \ll 1$.

3. Показано, что существование однонаправленной волны зарядовой плотности на высоком уровне Ландау, заполненном на половину, приводит к анизотропии тензора проводимости. Вблизи линии фазового перехода, $T_c - T \ll T_c$, вычислен тензор проводимости в состоянии однонаправленной волны зарядовой плотности при половинном заполнении уровня Ландау. Оказалось, что анизотропная часть тензора проводимости пропорциональна отклонению температуры от критической. Изотропная часть тензора проводимости в состоянии однонаправленной волны зарядовой плотности, как оказывается, отличается от тензора проводимости в однородном состоянии членами, пропорциональными $T_c - T$. В непосредственной близости от T_c ,

$1 \gg |T_c - T|/T_c \gg N^{-2}$, флуктуации параметра порядка приводят к флуктуационным поправкам для тензора проводимости, которые являются не аналитическими функциями $T_c - T$. Эти флуктуационные поправки сглаживают излом при $T = T_c$, который получается без их учета. Полученная температурная зависимость тензора проводимости качественно согласуется с экспериментальной.

Автор глубоко благодарен своим научным руководителям: М.А. Баранову — за научное руководство, подробное обсуждение многих вопросов, связанных с темой диссертации, и постоянное внимание к работе; М.В. Фейгельману — за научное руководство, внимание к работе, ценные советы и поддержку. Автор искренне благодарен также своим соавторам — М.А. Скворцову, Н.М. Щелкачеву, и, особенно, А.М.М. Прауискену — за совместную работу и неоднократные полезные обсуждения. Автор также благодарен А.Г. Абанову, П.Б. Вигману, Л.И. Глазману, П.Д. Григорьеву, А.М. Дюгаеву, А.С. Иоселевичу, С.В. Иорданскому, А. Каменеву, А.Б. Кашубе, С.Е. Коршунову, Д.С. Любшину, П.М. Островскому, Д.И. Подольскому, К.А. Сарайкину, А.М. Финкельштейну, Я.В. Фоминову и Д.Е. Хмельницкому за полезные обсуждения различных вопросов. Отдельная благодарность Г.М. Элиашбергу за указание на конечность времени жизни спиновых волн (Раз.1.4.2). Автор также благодарен всем сотрудникам Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау и Института теоретической физики университета г. Амстердам, ответы которых на различные вопросы оказали большую помощь в работе.

Работа над диссертацией проходила при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований №03-02-16677 и № 03-02-168-64а; программы «Квантовая макрофизика» Российской академии наук; Министерства промышленности, науки и технологий Российской Федерации; фонда “Династия”; Нидерландского научного фонда FOM; фонда Landau Scholarship от Forschungszentrum Jülich (Германия).

Публикации автора по теме диссертации

1. I.S. Burmistrov, *Two-dimensional electron liquid with disorder in a weak magnetic field*, ЖЭТФ **122**, 150 – 163 (2002).
2. I.S. Burmistrov and M.A. Baranov, *Mean-field phase diagram of two-dimensional electrons with disorder in a weak magnetic field*, Phys. Rev. B **68**, 155328-1 – 155328-12 (2003).
3. I.S. Burmistrov, *The anisotropic conductivity of two-dimensional electrons on half-filled high Landau level*, Письма в ЖЭТФ, **79**, 212 – 217 (2004).

Литература

- [1] Z.I. Alferov, *Nobel lecture: The double heterostructure concept and its applications in physics, electronics and technology*, Rev. Mod. Phys., **73**, 767 (2001).
- [2] T. Ando, A.B. Fowler, and F. Stern, *Electronic properties of two-dimensional systems*, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982).
- [3] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, *New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance*, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [4] D.C. Tsui, H.L. Stormer, and A.C. Gossard, *Two-dimensional magneto-transport in the extreme quantum limit*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
- [5] K. von Klitzing, *Nobel lecture: The quantized Hall effect*, Rev. Mod. Phys. **58**, 519 (1986).
- [6] R.B. Laughlin, *Nobel lecture: Fractional quantization*, Rev. Mod. Phys. **71**, 863 (1999).
- [7] H.L. Stormer, *Nobel lecture: The fractional quantum Hall effect*, Rev. Mod. Phys. **71**, 875 (1999).
- [8] D.C. Tsui, *Nobel lecture: Interplay of disorder and interaction in two-dimensional electron gas in intense magnetic field*, Rev. Mod. Phys. **71**, 891 (1999).

- [9] *The Quantum Hall effect*, ed. by R.E. Prange and S.M. Girvin, Springer-Verlag, Berlin, (1987).
- [10] T.Chakraborty and P. Pietiläinen, *The Fractional Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag, Berlin, (1988).
- [11] M.P.Lilly, K.B. Cooper, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Evidence for an anisotropic state of two-dimensional electrons in high Landau levels*, Phys. Rev. Lett. **82**, 394 (1999).
- [12] R.R. Du, D.C. Tsui, H.L. Stormer, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Strongly anisotropic transport in higher two-dimensional Landau levels*, Solid State Commun. **109**, 389 (1999).
- [13] W. Pan, R.R. Du, H.L. Stormer, D.C. Tsui, L.N. Pfeiffer, K.W. Baldwin and K.W. West, *Strongly anisotropic electric transport at Landau level filling factor $\nu = 9/2$ and $\nu = 5/2$ under a tilted magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **83**, 820 (1999).
- [14] M.P.Lilly, K.B. Cooper, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Anisotropic states of two-dimensional electron systems in high Landau levels: Effect of an in-plane magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **83**, 824 (1999).
- [15] K.B. Cooper, M.P.Lilly, J.P. Eisenstein, T. Jungwirth, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *An investigation of orientational symmetry-breaking mechanisms in high Landau levels*, Solid State Commun. **119**, 89 (2001).
- [16] K.B. Cooper, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Metastable resistance anisotropy orientation of two-dimensional electrons in high Landau levels*, Phys. Rev. Lett. **92**, 026086 (2004).
- [17] M.M. Fogler in *High magnetic fields: Applications in condensed matter physics and spectroscopy*, ed. by C. Berthier, L.-P. Levy, and G. Martinez, Springer-Verlag, Berlin, (2002).

- [18] R.G. Mani, J.H. Smet, K. von Klitzing, V. Narayanamurti, W.B. Johnson, V. Umansky, *Zero-resistance states induced by electromagnetic-wave excitation in GaAs/AlGaAs heterostructures*, Nature **420**, 646 (2002).
- [19] M.A. Zudov, R.R. Du, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Evidence for a new dissipationless effect in 2D electronic transport*, Phys. Rev. Lett. **90**, 046807 (2003).
- [20] I.L. Aleiner and L.I. Glazman, *Two-dimensional electron liquid in a weak magnetic field*, Phys. Rev. B **52**, 11296 (1995).
- [21] A.A. Koulakov, M.M. Fogler, and B.I. Shklovskii, *Charge density wave in two-dimensional electron liquid in weak magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **76**, 499 (1996).
- [22] M.M. Fogler, A.A. Koulakov, and B.I. Shklovskii, *Ground state of a two-dimensional electron liquid in a weak magnetic field*, Phys. Rev. B. **54**, 1853 (1996).
- [23] R. Moessner and J.T. Chalker, *Exact results for interacting electrons in high Landau levels*, Phys. Rev. B **54**, 5006 (1996).
- [24] *Electron-electron interactions in disordered systems*, ed. by A.L. Efros and M. Pollak, North-Holland, Amsterdam (1985).
- [25] A.M. Finkelstein, *Electron liquid in disordered conductors*, vol. 14 of Soviet Scientific Reviews, ed. by I.M. Khalatnikov, Harwood Academic Publishers, London, (1990).
- [26] A.M.M. Pruisken, M.A. Baranov, and B. Škorić, *Mishandling gauge invariance in the theory of the QHE (I)*, Phys. Rev. B **60**, 16807 (1999).
- [27] M.A. Baranov, A.M.M. Pruisken, and B. Škorić, *Mishandling gauge invariance in the theory of the QHE (II)*, Phys. Rev. B **60**, 16821 (1999).

- [28] A.M.M. Pruisken, B. Škorić, and M.A. Baranov, *Mishandling gauge invariance in the theory of the QHE (III)*, Phys. Rev. B **60**, 16838 (1999).
- [29] M.A. Baranov, I.S. Burmistrov, and A.M.M. Pruisken, *Nonfermi liquid theory for disordered metals near two dimensions*, Phys. Rev. B **66**, 075317 (2002).
- [30] A.H. MacDonald and S.M. Girvin, *Collective excitations of fractional quantum Hall states and Wigner crystallization in higher Landau levels*, Phys. Rev. B **33**, 4009 (1986).
- [31] R. Morf and N. d'Ambrumenil, *Stability and effective masses of composite fermions in the first and second Landau level*, Phys. Rev. Lett. **74**, 5116 (1995).
- [32] L. Belkhir and J. Jain, *Fractional quantum Hall effect in higher Landau levels*, Solid State Commun. **94**, 107 (1995).
- [33] A.H. MacDonald, *Influence of Landau-level mixing on the charge-density-wave state of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field*, Phys. Rev B **30**, 4392 (1984).
- [34] D.J. Yoshioka, *Effect of the Landau level mixing on the ground state of two-dimensional electrons*, J. Phys. Soc. Japan **53**, 3740 (1984).
- [35] A.P. Smith, A.H. MacDonald and G. Gumbs, *Quasiparticle effective mass and enhanced g factor for a two-dimensional electron gas at intermediate magnetic fields*, Phys. Rev. B **45**, 8829 (1992).
- [36] D. Bohm and D. Pines, *A collective description of electron interactions: III. Coulomb interactions in a degenerate electron gas*, Phys. Rev. **92**, 609 (1953).

- [37] Е.М. Баскин, Л.Н. Магарилл, М.В. Энтин, *Двумерная электрон-примесная система в сильном магнитном поле*, ЖЭТФ **75**, 723 (1978).
- [38] E. Brezin, D.J. Gross, and C. Itzykson, *Density of states in the presence of a strong magnetic field and random impurities*, Nucl. Phys. B **235**, 24 (1984).
- [39] А.М. Дюгаев, П.Д. Григорьев, Ю.Н. Овчинников, *Снятие вырождения уровней Ландау двумерных электронов точечными примесями*, Письма в ЖЭТФ **78**, 180 (2003).
- [40] I.S. Burmistrov and M.A. Skvortsov, *On the effect of far impurities on the density of states of two-dimensional electron gas in a strong magnetic field*, Письма в ЖЭТФ **78**, 188 (2003).
- [41] T. Ando and Y. Uemura, *Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic field. I. Characteristics of level broadening and transport under strong fields*, J. Phys. Soc. Japan **36**, 959 (1974).
- [42] И.В. Кукушкин, С.В. Мешков и В.Б. Тимофеев, *Плотность состояний двумерных электронов в поперечном магнитном поле*, УФН **155**, 219 (1988).
- [43] M.E. Raikh and T.V. Shahbazyan, *High Landau levels in a smooth random potential for two-dimensional electrons*, Phys. Rev. B **47**, 1522 (1993).
- [44] A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov, and I.E. Dzyaloshinskii, *Methods of quantum field theory in statistical physics*, Prentice Hall, New-York, (1963).
- [45] Л.В. Келдыш, *Диаграмная техника для неравновесных процессов*, ЖЭТФ **47**, 1515 (1964).
- [46] A. Kamenev and A. Andreev, *Electron-electron interactions in disordered metals: Keldysh formalism*, Phys. Rev. B **60**, 2218 (1999).

- [47] C. Chamon, A.W.W. Ludwig, and C. Nayak, Phys. Rev. B **60**, 2239 (1999).
- [48] S.F. Edwards and P.W. Anderson, *Theory of spin glasses*, J. Phys. F **5**, 965 (1975).
- [49] Р.Л. Стратонович, *Об одном методе вычисления квантовых функций распределения*, Докл. Акад. Наук СССР **115**, 1097 (1957); J. Hubbard, *Calculation of partition functions*, Phys. Rev. Lett. **3**, 77 (1959).
- [50] К.Б. Эффетов, А.И. Ларкин, Д.Е. Хмельницкий, *Взаимодействие диффузионных мод в теории локализации*, ЖЭТФ **79**, 1120 (1980)
- [51] A.M.M. Pruisken, *On localization in the theory of the quantized Hall effect: A two-dimensional realization of the θ -vacuum*, Nucl. Phys. B **235**, 277 (1984).
- [52] Л.П. Горьков, А.И. Ларкин, Д.Е. Хмельницкий, “*Взаимодействие диффузионных мод в теории локализации*”, Письма в ЖЭТФ **30**, 248 (1979).
- [53] P.W. Anderson, E. Abrahams, and T.V. Ramakrishnan, *Possible explanation of nonlinear conductivity in thin-film metal wires*, Phys. Rev. Lett. **43**, 718 (1979).
- [54] M.L. Mehta, *Random matrices*, 2nd Ed., Academic Press, San Diego (1991).
- [55] Э.И. Рашба и В.Б. Тимофеев, *Квантовый эффект Холла*, ФТП **20**, 977 (1986).
- [56] X.G. Wu and S.L. Sondhi, *Skyrmions in higher Landau levels*, Phys. Rev. B **51**, 14725 (1995).
- [57] T. Ando and Y. Uemura, *Theory of oscillatory g factor in an MOS inversion layers under strong magnetic field*, J. Phys. Soc. Japan **37**, 1044 (1974).

- [58] C. Kallin and B.I. Halperin, *Excitations from a filled Landau level in the two-dimensional electron gas*, Phys. Rev. B **30**, 5655 (1984).
- [59] K. Suzuki and Y. Kawamoto, *The g-factors of interacting electrons in silicon inversion layers*, J. Phys. Soc. Japan **35**, 1456 (1973).
- [60] Ю. А. Бычков, С.В. Иорданский, и Г.М. Элиашберг, *Двумерные электроны в сильном магнитном поле*, Письма в ЖЭТФ **33**, 152 (1981).
- [61] S.-R.E. Yang and A.H. MacDonald, *Coulomb gaps in a strong magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **70**, 4110 (1993).
- [62] Y. Hatsugai, P.A. Bares, and X.G. Wen, *Electron spectral function of an interacting two dimensional electron gas in a strong magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **71**, 424 (1993).
- [63] S. He, P.M. Platzman, and B.I. Halperin, *Tunneling into a two-dimensional electron system in a strong magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **71**, 777 (1993).
- [64] I.L.Aleiner, H.U. Baranger, and L.I. Glazman, *Tunneling into a two-dimensional electron liquid in a weak magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **74**, 3435 (1995).
- [65] L.S. Levitov and A.V. Shytov, in: *Correlated fermions and transport in mesoscopic systems*, Edition Frontieres, (1996).
- [66] R.C. Ashoori, J.A. Lebens, N.P. Bigelow and R.H.Silsbee, *Equilibrium tunneling from the two-dimensional electron gas in GaAs: Evidence for a magnetic-field-induced energy gap*, Phys. Rev. Lett. **64**, 681 (1990).
- [67] R.C. Ashoori, J.A. Lebens, N.P. Bigelow and R.H.Silsbee, *Energy gaps of the two-dimensional electron gas explored with equilibrium tunneling spectroscopy*, Phys. Rev. B **48**, 4616 (1993).

- [68] L.S. Levitov and A.V. Shytov, *Spatial coherence of tunneling in double wells*, cond-mat/9597058.
- [69] H. Fukuyama, P.M. Platzman, and P.W. Anderson, *Two-dimensional electron gas in a strong magnetic field*, Phys. Rev. B **19**, 5211 (1979).
- [70] H.A. Fertig, *Unlocking Transition for Modulated Surfaces and Quantum Hall Stripes*, Phys. Rev. Lett. **82**, 3693 (1999).
- [71] A.H. MacDonald and M.P.A. Fisher, *Quantum theory of quantum Hall smectics*, Phys. Rev. B **61**, 5724 (2000).
- [72] M.M. Fogler and V.M. Vinokur, *Hydrodynamics of the quantum Hall smectics*, Phys. Rev. Lett. **84**, 5828 (2000).
- [73] R. Côté and H.A. Fertig, *Collective modes of quantum Hall stripes*, Phys. Rev. B **62**, 1993 (2000).
- [74] H. Yi, H.A. Fertig and R. Côté, *Stability of the smectic quantum Hall state: A quantitative study*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4156 (2000).
- [75] E. Fradkin and S.A. Kivelson, *Liquid-crystal phases of quantum Hall systems*, Phys. Rev. B **59**, 8065 (1999).
- [76] A. Lopatnikova, S.H. Simon, B.I. Halperin, and X.-G. Wen, *Striped states in quantum Hall effect: Deriving a low-energy theory from Hartree-Fock*, Phys. Rev. B **64**, 155301 (2002).
- [77] D.G. Barci, E. Fradkin, S.A. Kivelson, and V. Oganesyan, *Theory of the quantum Hall Smectic Phase. I. Low-energy properties of the quantum Hall smectic fixed point*, Phys. Rev. B **65**, 245319 (2002); D.G. Barci and E. Fradkin, *Theory of the quantum Hall Smectic Phase. II. Microscopic theory*, Phys. Rev. B **65**, 245320 (2002).

- [78] S. Scheidl and F. von Oppen, *Elastic theory of quantum Hall smectics: Effects of disorder*, Europhys. Lett. **55**, 260 (2001).
- [79] T.D. Stanescu, I. Martin, and P. Philips, *Finite-temperature density instability at high Landau level occupancy*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1288 (2000).
- [80] А.А. Абрикосов и Л.П. Горьков, *К теории сверхпроводимости сплавов с парамагнитными примесями*, ЖЭТФ **39**, 1781 (1960).
- [81] А.И. Ларкин, *Векторное спаривание в сверхпроводниках малых размеров*, Письма в ЖЭТФ **2**, 205 (1965).
- [82] А.А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
- [83] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика, том V*, Наука, Москва (1976).
- [84] С.А. Бразовский, *Фазовый переход изотропной системы в неоднородное состояние*, ЖЭТФ **68**, 175 (1975).
- [85] D.N. Sheng, Z. Wang, and B. Friedman, *Role of disorder in half-filled high Landau levels*, Phys. Rev. B **66**, 161103 (2002).
- [86] J.P. Eisenstein, M.P. Lilly, K.B. Cooper, L.N. Pfeiffer, K.W. West, *New collective states of 2D electrons in high Landau levels*, Physica E **9**, 1 (2000).
- [87] F. von Oppen, B.I. Halperin, and A. Stern, *Conductivity tensor of striped quantum Hall phases*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2937 (2000).
- [88] A.M. Dykhne and I.M. Ruzin, *Theory of the fractional quantum Hall effect: the two-phase model*, Phys. Rev. B **50**, 2369 (1994).
- [89] J. Zhu, W. Pan, H.L. Stormer, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Density-induced interchange of anisotropy axes at half-filled high Landau levels*, Phys. Rev. Lett. **88**, 116803 (2002).

- [90] T. Jungwirth, A.H. MacDonald, L.Smrčka, and S.M. Girvin, *Field-tilt anisotropy in quantum Hall stripe states*, Phys. Rev. B **60**, 15574 (1999).
- [91] D.V. Fil, *Piezoelectric mechanism of orientation of stripe structures in two-dimensional electron systems*, Sov. J. Low Temp. Phys. **26**, 581 (2000).
- [92] D.V. Fil, *On the role of electron-phonon interaction in the resistance anisotropy of two-dimensional electrons in GaAs heterostructures*, Sov. J. Phys.: Condens Matter **13**, 11633 (2001).
- [93] L.G. Aslamasov and A.I. Larkin, *The influence of fluctuation pairing of electrons on the conductivity of normal metal*, Phys. Lett. A **26**, 238 (1968).
- [94] D. Weiss, K. von Klitzing, K. Ploog, and G. Weimann, *Magnetoresistance oscillations in a two-dimensional electron gas induced by a submicrometer periodic potential*, EuroPhys. Lett. **8**, 179 (1989).
- [95] R.R. Gerhardts, D. Weiss, and K. von Klitzing, *Novel magnetoresistance oscillations in a periodically modulated two-dimensional electron gas*, Phys. Rev. Lett. **62**, 1173 (1989).
- [96] C.W.J. Beenakker, *Guiding-center-drift resonance in a periodically modulated two-dimensional electron gas*, Phys. Rev. Lett. **62**, 2020 (1989).
- [97] C. Zhang and R.R. Gerhardts, *Theory of magnetotransport in two-dimensional electron systems with unidirectional periodic modulation*, Phys. Rev B **41**, 12850 (1990).
- [98] F.M. Peeters and P. Vasilopoulos, *Electrical and thermal properties of a two-dimensional electron gas in a one-dimensional periodic potential*, Phys. Rev. B **46**, 4667 (1992).
- [99] A.D. Mirlin and P.Wölfle, *Weiss oscillations in the presence of small-angle impurity scattering*, Phys. Rev. B **58**, 12986 (1998).

- [100] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzik, *Mathematical Tables*, Academic Press (1980).