Российская Академия Наук
Математический институт имени В. А. Стеклова

На правах рукописи

Прохоренко Дмитрий Владимирович

Некоторые алгебраические методы в моделях квантовой теории поля и теория перенормировок

01.01.03 — математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2006

Работа выполнена в отделе Математической физики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Научный руководитель — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук И. В. Волович.

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук А. П. Исаев; доктор физико-математических наук, профессор О. Г. Смолянов.

Ведущая организация — Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Защита состоится 26 октября 2006 года 14⁰⁰ в час. на заседании диссертационного совета Д 002.022.02 при Математическом институте им.
В. А. Стеклова РАН по адресу:
119991, Москва, ГСП-1, ул. Губкина, д. 8, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Автореферат разослан: 25 сентября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-матемматических наук Дрожжинов Ю. Н. Дрожжинов.

Общая характеристика работы

Актуальность темы:

Центральным объектом в квантовой теории поля является S-матрица. Однако, во многих случаях, при изучении моделей с нестабильными состояниями, в теории твердого тела, квантовой оптике важно поведение оператора эволюции на больших, но конечных временах при малых константах связи. Этот режим интересен, например, для оценки времени релаксации атома к основному состоянию, для вывода мастер-уравнения Паули и т. д.

Поведение оператора эволюции в таком режиме исследовалось многими авторами. Н. Н. Боголюбовым рассмотрен вопрос об установлении термодинамического равновесия в системе, состоящей из гармонического осциллятора, взаимодействующего посредством квадратичного взаимодействия с термостатом, состоящим из осцилляторов. Л. Ван Хов (L. van Hove) рассмотрел оператор эволюции в пределе $\lambda \to 0$, $t \to \infty$, $\lambda^2 t = \mathrm{const}$, где t — время, λ — константа связи. И. Пригожин (I. Prigogin) с сотрудниками применял предел Ван Хова для вывода кинетических уравнений.

Изучение асимптотического поведения оператора эволюции для квантовой электродинамики проводилось П. П. Кулишем и Л. Д. Фаддеевым в связи с проблемой инфракрасных расходимостей.

Другой важный момент. Большинство элементарных частиц нестабильны, что затрудняет определение для них матрицы рассеяния и делает задачу изучения асимптотики оператора эволюции нетривиальной. Унитарное представление группы Пуанкаре, соответствующее нестабильным частицам, было построено Г. Заллером (H. Saller). Исследование матричных элементов оператора эволюции для одной модели квантовой теории поля было произведено Л. Майани (L. Maiani) и М. Теста (M. Testa). Новые предписания перенормировки волновой функции, связанные с выбором комплексной точки вычитания, предложены Я. Чжоу (Y. Zhou).

Изучение поведения систем на больших временах и константах связи привело к возникновению метода стохастического предела в работах Л. Аккарди (L. Accardy), Ю. Г. Лу (Yu. G. Lu), И. В. Воловича. Этот метод состоит в нахождении и исследовании квантовых стохастических уравнений для оператора эволюции.

В работе И. Я. Арефьевой и И. В. Воловича была выведена общая формула, описывающая вакуумный матричный элемент оператора эволюции для гамильтонианов с гладким взаимодействием (ABC-формула). Эта формула была выведена только для гамильтонианов без нестабильных состояний, а в случае наличия нестабильных состояний были проделаны вычисления во втором порядке по константе связи.

В свете вышесказанного представляется очевидным, что исследование динамики при больших временах квантовых систем с нестабильными состояниями — глубокая и важная задача.

С другой стороны, с момента создания квантовой механики внимание многих исследователей привлекала алгебраическая формулировка основных положений квантовой теории. Основными объектами в этом подходе являются некоторая C^*-алгебра или алгебра фон Неймана наблюдаемых и множество состояний на ней.

В этом подходе для описания состояния системы в статистическом равновесии в термодинамическом пределе используют так называемые состояния Кубо — Мартина — Швингера (КМШ-состояния), впервые появившиеся в физической литературе. Эти состояния являются аналогами Гиббсовых состояний в классической статистической механике. В дальнейшем КМШ-состояния исследовались многими авторами, такими, как Р. Хааг (R. Haag), М. М. Гугенгольц (M. M. Hugenholtz), М. Винник (M. Vinnik) и многими другими. Недавно А. Конн (A. Connes) с сотрудниками исследовали КМШ-состояния, возникающие в задачах теории чисел и некоммутативной геометрии.

Представляет интерес исследование КМШ-состояний на алгебрах, имеющих физическое происхождение. В работах Л. Аккарди и И. В. Воловича при исследовании квантовых стохастических уравнений для ряда систем была введена так называемая алгебра квадратов белого шума. КМШ-состояния на этой алгебре исследовались Л. Аккарди, Г. Г. Амосовым, У. Францем (U. Franz), М. Скейдом (M. Skeide)

Важной темой в настоящей диссертации является исследование и использование методов теории перенормировок в различных контекстах.

Математически корректная теория перенормировок (теория R-операции) была построена Н. Н. Боголюбовым и О. С. Парасюком, она изложена в известной монографии Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова. К. Хепп (K. Hepp) усовершенствовал предложенные ими доказательства.

Недавно А. Конн и Д. Креймер (D. Kreimer) предложили алгебраический подход к теории перенормировок в модели скалярного квантового поля. Они ввели на диаграммах Фейнмана скалярной теории φ^3 в 6-мерном пространстве-времени структуру алгебры Хопфа. Алгебры Хопфа, как известно, играют важную роль в теории квантовых групп и других некоммутативных теориях. Фейнмановские амплитуды в этом подходе являются элементами группы характеров. Если обозначить U — набор неперенормированных амплитуд, C — набор контрчленов, а R — набор перенормированных амплитуд, то будет справедливо равенство:

$$R = C \star U, \tag{1}$$

где $\star$ означает умножение в группе характеров. Размерно-регуляризованная амплитуда Фейнмана $U(d)$ (d — параметр размерной регуляризации) будет голоморфна в некоторой проколотой окрестности точки $d = 6$. Тогда $U(d)$ можно рассматривать как данные некоторой задачи Римана — Гильберта. Конн и Креймер показали, что эта задача имеет единственное решение, а положительная и отрицательная части разложения Биркгофа $U(d)$ определяют перенормированные амплитуды и контрчлены, получаемые при использовании схемы минимальных вычитаний.

Наличие копроизведения на множестве диаграмм в теории перенормировок сделало ее привлекательной для многочисленных исследователей. В частности возникают вопросы о физическом происхождении алгебры Фейнмановских диаграмм и о том как структура алгебры Хопфа фейнмановских диаграмм взаимодействует с прочими стуктурами, встречающимися в квантовой теории поля, например со всевозможными симметриями, в том числе и калибровочными.

В дисссертации первые две проблемы (исследование динамики квантовых систем на больших временах и исследование КМШ-состояний) связаны с третьей (изучение структуры алгебры Хопфа на диаграммах Фейнмана) тем, что при их (первых двух) изучении возникают явления аналогичные тем, которые присутствуют в теории перенормировок в квантовой теории поля.

Актуальность темы диссертации следует из того, что в различных областях квантовой физики, к которым приковано внимание многочисленных исследователей, возникают структуры, аналогичные структуре R-операции, а также из того, что, как выяснилось в последнее время, саму структуру R-операции можно значительно прояснить, используя разнообразные математические методы (методы некоммутативной геометрии и т.д), что позволяет улучшить понимание таких фундаментальных вопросов, как доказательство теоремы Боголюбова — Парасюка, доказательство перенормируемости калибровочных теорий.

Цель работы:

Исследование динамики квантовых систем с нестабильными состояниями на больших временах; исследование КМШ-состояний на некотором расширении универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли группы $SL(2,\mathbb{C})$; распространение алгебраического подхода Конна — Креймера к перенормировкам на случай калибровочных полей.

Научная новизна.

Все основные результаты диссертации являются новыми.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Для широкого класса моделей квантовой теории поля и статистической физики с нестабильными состояниями получена общая формула (ABC-формула), описывающая поведение вакуумного среднего оператора эволюции на больших временах.

2. Получена классификация состояний Кубо — Мартина — Швингера (КМШ-состояний) на некотором расширении универсальной обертывающей алгебры Ли группы $SL(2,\mathbb{C})$. Показано, что КМШ-состояния на этом расширении находятся во взаимно-однозначном соответствии с некоторым классом вероятностных мер на неотрицательной вещественной полуоси.

3. Построено обобщение алгебраического подхода Конна — Креймера к теории перенормировок в квантовой теории поля на случай квантовой электродинамики. В частности определено действие калибровочных преобразований на алгебре Хопфа диаграмм Конна—Креймера и показано, что множество калибровочно-инвариантных характеров образует подгруппу группы характеров алгебры Хопфа диаграмм. Показано, что если задача Римана — Гильберта на группе характеров имеет решение и данные задачи Римана — Гильберта калибровочно-инвариантны, то и элементы соответствующего биркгофова разложения так же калибровочно-инвариантны.

Методы исследования:

В диссертации используются методы классического анализа, функционального анализа, теория обобщенных функций, теория представлений групп и алгебр, теория алгебр Хопфа.

Теоретическая и практическая ценность:

Настоящая работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в главе 1, могут быть использованы для анализа поведения при больших временах систем с нестабильными состояниями, например для систем, встречающихся в квантовой оптике, и т. д. Вместе с тем методы, используемые в главе 1 для доказательства сходимости интегралов, представляющих коэффициенты A и B, могут быть использованы, например, для анализа расходимостей в кинетических уравнениях. Результаты, полученные в главе 2, могут быть использованы для анализа методом стохастического предела открытых квантовых систем, взаимодействующих с бозе-полем, посредством квадратичного по операторам рождения—уничтожения взаимодействия в случае, когда резервуар имеет ненулевую температуру. Вместе с тем результаты главы 2 показывают, что имеется широкий круг задач, поддающихся решению, связанный с исследованием КМШ-состояний на различных алгебрах Ли и квантовых группах. Результаты главы 3 показывают, что подход Конна — Креймера к перенормировкам можно распространить на случай квантовой электродинамики. При этом оказывается, что калибровочные преобразования в этом подходе являются объектами с хорошими математическими свойствами, а именно множество калибровочно-инвариантных характеров образует подгруппу группы характеров, а так же справедливо утверждение: если данные задачи Римана—Гильберта калибровочно-инвариантны то и элементы биркгофова разложения калибровочно-инвариантны.

Аппробация работы: Результаты работы докладывались автором на конференции молодых ученых МГУ, 2002, на семинарах отделов Математической физики и Теоретической физики Математического Института им. В.А. Стеклова 2004, 2006, на семинаре "Бесконечномерный анализ и математическая физика"кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ, 2004.

Публикации: Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1,2,3].

Структура и объем работы: Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Объем диссертации составляет 114 страницы. Библиография включает 82 наименования.

Содержание работы

Во **введении** формулируются цели исследования, а также описывается структура диссертационной работы.

В **в главе 1** получена ABC-формула для случая, когда есть нестабильные состояния.

Пусть $\mathcal{F}$ обозначает бозонное пространство Фока над $L_2(\mathbf{R}^d)$, в котором стандартным образом действуют операторы рождения и уничтожения $a^+(k)$ и $a(k)$, удовлетворяющие следующим каноническим коммутационным соотношениям:

$$[a(k), a^+(k')] = \delta(k - k').$$

Остальные коммутаторы равны нулю. Вакуумное состояние определяется соотношением: $a(k)|0\rangle = 0$. Гамильтониан рассматриваемой модели есть:

$$\begin{gathered} H = H_0 + \lambda V, \\ H_0 = \int \omega(k) a^+(k) a(k) dk. \end{gathered} \tag{2}$$

H_0—свободный гамильтониан,

$$\begin{gathered} \omega(k) = \frac{k^2}{2} - \omega_0, \\ \omega_0 \in \mathbf{R},\ \omega_0 \neq 0, \end{gathered}$$

а V— взаимодействие, которое есть сумма мономов Вика с ядрами из пространства Шварца:

$$V = \lambda \sum_{m,n=1}^{N} \int v_{m,n}(p_1, ..., p_m | p_1, ..., p_n) \prod_{i=1}^{m} a^+(p_i) dp_i \prod_{j=1}^{n} a(q_j) dq_j,$$

$$k, p_i, q_j \in \mathbb{R}^d,$$
$$N = 1, 2, 3...,$$

$v_{m,n}$ — функции из пространства Шварца, удовлетворяющие соотношению эрмитовости $v_{m,n} = \bar{v}_{n,m}$, λ — вещественное число.

Этот гамильтониан задан изначально на всюду плотной области D, состоящей из векторов в $\mathcal{F}$, у которых только конечное число компонент отлично от нуля и все они лежат в пространстве Шварца.

Основная теорема главы 1 настоящей диссертаци формулируется следующим образом.

Теорема 1.1. *Если $d \geq 3$, то*

$$\langle 0|e^{-itH}|0\rangle = e^{At+B+C(t)},$$

в смысле формальных степенных рядов по λ. Здесь $A, B, C(t)$ — формальные степенные ряды по λ:

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} A_n \lambda^n,$$
$$B = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \lambda^n,$$
$$C(t) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n(t) \lambda^n$$

и $C_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

По определению, граф Фридрихса — это четверка $(V', R, (\cdot)^+, (\cdot)^-)$, где

V' — конечное упорядоченное множество, называемое множеством вершин;

R — конечное множество, называемое множеством ребер;

l^+ и l^- суть отображения:

$$l^{\pm} : R \to V$$

такие, что $\forall r \in R\; l^+(r) > l^-(r)$.

Мы обозначим через V множество всех вершин, за исключением минимальной.

Графы Фридрихса возникают при приведении к нормальной форме произведения мономов Вика.

Согласно кластерной теореме имеем:

$$U =: e^{U_c} :,$$

где индекс c в U_c означает, что оставляются только связные графы Фридрихса, а : : означает нормальное упорядочение.

Положим $F(t) = \langle 0|U_c(t)|0\rangle$,

$$F(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n+1} F_n(t),$$

$$F_n(t) = \sum_{\Phi} F_n^{\Phi}(t), \tag{3}$$

где в последней сумме суммирование ведется по всем графам Фридрихса с $n+1$ вершиной. Для $F_n^{\Phi}(t)$ имеется выражение:

$$F_n^{\Phi}(t) = \int_0^t dt_n ... \int_0^{t_1} dt_0 \int e^{i(E_n t_n + ... + E_0 t_0)} f(p) dp.$$

Здесь $f(p)$ — произведение ядер мономов, а

$$E_v = \sum_{l^-(r)=v} \omega(p_r) - \sum_{l^+(r)=v} \omega(p_r). \tag{4}$$

Далее $F_n^{\Phi}(t)$ преобразуется к виду:

$$F_n^{\Phi}(t) = t \int_0^{+\infty} dt_n ... \int_0^{t_2} dt_1 \int e^{i(E_n t_n + ... + E_1 t_1)} f(p) dp -$$

$$- \lim_{t \to \infty} \int_0^{+\infty} \min\{t, t_n\} dt_n ... \int_0^{t_2} dt_1 \int e^{i(E_n t_n + ... + E_1 t_1)} f(p) dp. \tag{5}$$

Первое слагаемое в последней формуле есть $A_n^{\Phi} t$, последнее при $t \to +\infty$ стремится к B_n^{Φ}.

Задача, следовательно, состоит в том, чтобы понять, когда указанные интегралы сходятся.

Введем следующие множества.

Для любого $r \in R$ определим множество V_r:

$$V_r := \{v | l^+(r) \geq v > v-1 \geq l^-(r)\}.$$

Для любого $v \in V$ определим множество R_v следующим образом:

$$R_v := \{r | l^+(r) \geq v > v-1 \geq l^-(r)\}.$$

Очевидно, что $v \in V_r \Leftrightarrow r \in R_v$.

Для A_n^Φ имеем следующее представление:

$$A_n^\Phi = \int_0^\infty d\tau_n ... \int_0^\infty d\tau_1 e^{i\omega_0 \sum\limits_{r\in R} \sum\limits_{v \in V_r} \tau_v} \times$$
$$\times \int \prod_r dp_r e^{-\frac{i}{2} \sum\limits_{r \in R} p_r^2 \sum\limits_{v\in V_r} \tau_v} f(...p_r...).$$

V— это по-прежнему множество вершин, за исключением минимальной, а f — функция из пространства Шварца, возникающая, как произведение мономов Вика.

Чтобы сформулировать достаточное условие сходимости интегралов такого рода, введем понятие фактор — графа. Пусть дан граф $\Phi = \{V', R, l^+, l^-\}$ и подмножество вершин $A \subset V$. Фактор — граф Φ_A получается следующим образом: берем самую младшую вершину v из V, не принадлежащую A, склеиваем ее с $v-1$ и выкидываем все петли, т. е. линии, начинающиеся и кончающиеся в одной вершине. Затем берем следующую вершину, не принадлежащую A, делаем с ней то же самое и т. д. (аккуратное определение дано в главе 1).

Определение. Степенью расходимости графа Φ называется число:

$$C_\Phi = |V| - \frac{3}{2}|R|. \tag{6}$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 1.4. *A_n^Φ сходится, если степень расходимости графа Φ и всех его фактор-графов отрицательна.*

Теорема 1.5. *В условиях предыдущей теоремы корректно определено выражение для B_n^Φ.*

Сформулированная теорема аналогична следствию из теоремы Боголюбова — Парасюка, (иногда называемому теоремой Вайнберга), утверждающему, что Фейнмановская амплитуда для заданной диаграммы конечна, если степень расходимости этой диаграммы и всех ее поддиаграмм отрицательна.

Методы, использованные при доказательстве сходимости интегралов, представляющих A и B, могут быть использованы для анализа расходимостей в кинетических уравнениях.

В главе 2 исследуются состояния Кубо — Мартина — Швингера на некотором расширении универсальной обертывающей алгебры Ли группы $SL(2, \mathbb{C})$. Эта задача возникла следующим образом. В работе Л. Аккарди и И.В. Воловича изучались квантовые стохастические уравнения вида:

$$i\frac{d}{d\tau}U_\tau = (a((b_\tau^+)^2 + b_\tau^2) + cb_\tau^+ b_\tau)U_\tau, \tag{7}$$

где a, c — действительные числа, а $\{b_\tau^+, b_\tau\}$ — квантовый белый шум, $(\tau \in \mathbb{R})$, т. е. пара операторозначных обобщенных функций, удовлетворяющих каноническим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [b_\tau, b_{\tau'}] = [b_\tau^+, b_{\tau'}^+] = 0, \\ [b_\tau, b_{\tau'}^+] = \delta(\tau - \tau'). \end{aligned} \tag{8}$$

Если положить:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} b_\tau b_\tau, \\ B^+(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} b_\tau^+ b_\tau^+, \\ N(\tau) &= b_\tau^+ b_\tau, \end{aligned} \tag{9}$$

то легко видеть, что полученные операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [N(\tau), N(\tau')] &= 0, \\ [B(\tau), B^+(\tau')] &= 2N(\tau)\delta(\tau - \tau') + \delta(\tau - \tau')\delta(0), \\ [B(\tau), N(\tau')] &= 2B(\tau)\delta(\tau - \tau'). \end{aligned} \tag{10}$$

Оператор B сопряжен B^+, N — самосопряжен. В этой же работе предложено заменить $\delta(0)$ на произвольную константу. Полученная алгебра называется алгеброй квадратов белого шума.

Возникает вопрос, как устроено множество КМШ—состояний на алгебре квадратов белого шума. После дискретизации, предложенной в разделе 2, задача сводится к аналогичной задаче для универсальной обертывающей алгебры Ли группы $SL(2,\mathbf{C})$. В главе 2 дана полная классификацию КМШ -состояний на некотором расширении $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$. Переход к предлагаемому расширению заменяет собой наложение некоторых топологических условий на множество состояний, необходимых, чтобы исключить слишком патологические состояния. Мы найдем, что существует взаимно-днозначное соответствие между множеством всех КМШ-состояний и множеством всех вероятностных мер на положительной полуоси.

Более точно обозначим через $\mathcal{P}$ пространство всех комплексно-значных функций на $\mathbf{R}$, растущих на бесконечности не быстрее некоторого полинома. Обозначим через T_a оператор, действующий в пространстве $\mathcal{P}$ по формуле:

$$T_a : f(x) \mapsto (T_a f)(x) = f(x-a). \tag{11}$$

Определеление. Обозначим через $\mathcal{A}$ $\star$-алгебру, порожденную образуюшими $X, Y, \{N_F\}$, где $F \in \mathcal{P}$, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} N_{\lambda F+\mu G} &= \lambda N_F + \mu N_G, \ \lambda, \mu \in \mathbf{C}, \\ N_{FG} &= N_F N_G, \end{aligned} \tag{12}$$

и

$$\begin{aligned} XN_F &= N_{T_a F} X, \\ YN_F &= N_{T_{-a} F} Y, \\ [X,Y] &= N_x. \end{aligned}$$

Инволюция в $\mathcal{A}$ задана следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} X^\star &= -Y. \\ (N_F)^\star &= N_{F^\star}, \end{aligned} \tag{13}$$

Мы можем вложить $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C}))$ в $\mathcal{A}$, если отождествить элемент $X^n Y^m H^k$ из $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C}))$ с элементом $X^n Y^m N_{x^k}$ из $\mathcal{A}$.

Обозначим через H элемент N_x, $H := N_x$.

Имеется однопараметрическая группа автоморфизмов U_t, $(t \in \mathbf{R})$ алгебры $\mathcal{A}$, действующая на генераторах следующим образом:

$$U_t(X) = e^{it}X,\ U_t(Y) = e^{-it}Y,\ U_t(N_F) = N_F. \tag{14}$$

Приведем определение КМШ–состояния.

Определение. Пусть $\mathcal{D}$ — $\star$-алгебра с единицей. Состоянием τ на $\mathcal{D}$ называется линейный положительный функционал, нормированный условием $\tau(1) = 1$.

Определение. Пусть $\mathcal{E}$— $\star$-алгебра, β—вещественное положительное число и V_t $(t \in \mathbf{R})$ — однопараметрическая группа автоморфизмов $\mathcal{E}$. Мы скажем, что линейный функционал τ на $\mathcal{E}$ — КМШ-функционал по отношению к паре $\{\beta, V_t\}$, если $\forall A, B \in \mathcal{E}$ существует функция $\mathcal{F}_{AB} : S_\beta \to \mathbf{C}$, которая непрерывна в полосе $S_\beta = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im} z \leq \beta\}$ и голоморфна внутри нее, такая, что для вещественных t справедливо:

$$\mathcal{F}_{AB}(t) = \tau(AV_t(B)) \tag{15}$$

и

$$\tau(V_t(A)B) = \mathcal{F}_{BA}(t + i\beta). \tag{16}$$

$\star$-подалгебра $\mathcal{A}$, порожденная всеми элементами вида N_F, где $F \in \mathcal{P}$, называется картановской подалгеброй и обозначается символом $\mathcal{N}$. Как будет видно из главы 2, $\mathcal{N}$ имеет достаточно много представлений и, поэтому $\mathcal{N}$ изоморфна $\mathcal{P}$, если последнее пространство превратить в алгебру, определив умножение элементов поточечно.

В главе 2 будет показано, что любое состояние ρ на $\mathcal{N}$ порождает на вещественной прямой вероятностную меру $d\sigma$, убывающую быстрее любого обратного полинома, такую, что

$$\rho(N_F) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(x) F(x). \tag{17}$$

Обратно, если дана вероятностная мера $d\sigma$ на прямой, убывающая быстрее любого обратного полинома, то последняя формула задает состояние на $\mathcal{N}$.

Основной результат главы 2 формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. Состояние ρ на $\mathcal{N}$ продолжается до КМШ-состояния на $\mathcal{A}$ по отношению к паре $\{\beta, U_t\}$ $(\beta > 0)$ тогда и только тогда, когда характеристический функционал состояния ρ на $\mathcal{N}$ $\chi_\rho(t) := \rho(N_{e^{itx}})$ имеет вид:

$$\chi_\rho(t) = m_1 + m_2 \frac{1 - e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta + 2it}} \int\limits_{+0}^{+\infty} d\sigma(\lambda) e^{it\lambda}, \tag{18}$$

для некоторой вероятностной меры $d\sigma$ на полупрямой $(0, +\infty)$, убывающей быстрее любого обратного полинома. Здесь m_1, m_2 — вещественные числа, такие, что $m_1 \geq 0$, $m_2 \geq 0$, $m_1 + m_2 = 1$. Если продолжение существует, то оно единственно.

В **главе 3** настоящей диссертации предлагается обобщение алгебраического подхода Конна—Креймера к теории перенормировок в квантовой теории поля на случай калибровочных полей. Так как формальные определения занимают много места, здесь мы ограничимся неформальными описаниями основных элементов схемы.

Рассмотрим какую-либо модель релятивистской квантовой теории поля. Соответствующаяалгебра Конна — Креймера $\mathcal{H}$ это коммутативная алгебра с единицей, порожденная образующими (Γ, σ), где Γ — произвольная сильно-связная диаграмма (вершины которой не обязательно строятся по фиксированному лагранжиану) вместе с указанием вершинных операторов в каждой вершине, а σ — обобщенная функция с компактным носителем, аргументами которой являются импульсы частиц входящих или выходящих из диаграммы, принимающая значения в тензорном произведении по всем внешним линиям линейных пространств, описывающих внутренние степени свободы соответствующих частиц. Соотношения, которыми связаны образующие, выражают факт линейности элемента (Γ, σ) по взаимодействию в каждой вершине и по внешней структуре. Алгебра $\mathcal{H}$ становится алгеброй Хопфа, если коумножение на образующих задать формулой:

$$\Delta((\Gamma, \sigma)) = (\Gamma, \sigma) \otimes 1 + 1 \otimes (\Gamma, \sigma) + \sum_{\emptyset \subset \gamma_\alpha \subset \Gamma} \gamma_\alpha \otimes (\Gamma/\gamma_\alpha, \sigma). \tag{19}$$

Здесь γ_α — набор поддиаграмм Γ, взятых вместе с некоторым набором внешних структур, Γ/γ_α — фактор-диаграмма. Подробные определения см. в диссертации. Приведенная в диссертации конструкция обобщает конструкцию Конна — Креймера для скалярной теории поля с взаимодействием φ^3 на широкий класс моделей.

В случае квантовой электродинамики для любой обобщенной функции α с компактным носителем заданной на $\mathbf{R}^4$, можно определить (линейно от нее зависящее) отображение $\delta_\alpha : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, которое, по построению, является дифференцированием алгебры $\mathcal{H}$ как алгебры, а не как алгебры Хопфа. Отображение δ_α так же называется калибровочным преобразованием.

Пусть G обозначает группу характеров алгебры Хопфа $\mathcal{H}$. Мы скажем, что характер $\chi \in G$ — калибровочно-инвариантен, если $\chi \circ \delta_\alpha = 0$ Оказывается, что справедлива следующая доказанная в настоящей диссертации теорема.

Теорема 3.1 *Множество калибровочно-инвариантных характеров образует подгруппу группы характеров.*

Фейнмановские правила и размерная регуляризация (мы рассматриваем евклидову теорию поля) задают элемент $U_z \in M'$, мероморфный (в некотором естественном смысле) по z. Этот элемент будет калибровочно инвариантным.

Далее в главе 3 рассматривается задача Римана — Гильберта на группе характеров G. Задача Римана — Гильберта выглядит так:

Задача Римана — Гильберта. Пусть U_z — характер алгебры Хопфа $\mathcal{H}$, голоморфный по z в некоторой проколотой окрестности $O\setminus\{0\}$ нуля открытой комплексной плоскости. Задача Римана — Гильберта состоит в том, чтобы построить для U_z биркгофовское разложение, т. е. указать характеры R_z и C_z, голоморфные по z в O и $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, соответственно, такие, чтобы в $O \setminus \{0\}$ было выполнено:

$$R_z = C_z \star U_z \tag{20}$$

и $C_z \to \mathbf{1}$, если $z \to \infty$.

Существование решения задачи Римана — Гильберта в такой постановке было фактически доказано Конном и Креймером. В работе доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2. *Если данные задачи Римана — Гильберта U_z калибровочно-инвариантны, то и элементы биркгофовского разложения C_z и R_z тоже калибровочно-инвариантны.*

В заключении перечисляются основные результаты диссертации.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] Д. В. Прохоренко. ABC-формула и R—операция для квантовых процессов с распадом, сдано в печать. ТМФ, т. 149, № 2

[2] И. В. Волович, Д. В. Прохоренко. Перенормировки квантовой электродинамики и алгебры Хопфа. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 2004, т. 245, с. 288-295.

[3] D. Prokhorenko. Squares of white noise, $SL(2, \mathbb{C})$ and Kubo - Martin - Schwinger states, сдано в печать. Inf. Dim. Anal. Quant. Prob.

Принято к исполнению 31/07/2006
Исполнено 02/08/2006

Заказ № 523
Тираж: 100 экз.

ООО «11-й ФОРМАТ» ИНН 7726330900
Москва, Варшавское ш., 36
(495) 975-78-56
(495) 747-64-70
www.autoreferat.ru