

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М.В. Ломоносова

На правах рукописи

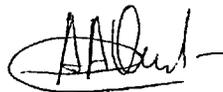
ОСИПЦОВ Андрей Александрович

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЙ ЛАВЫ НА
КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Специальность 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Москва – 2006

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета и в лаборатории общей гидромеханики Института механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научные руководители: доктор физико-математических наук,
профессор А.А. Бармин
доктор физико-математических наук,
член-корр. РАН О.Э. Мельник

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор А.Б. Ватажин
доктор физико-математических наук,
член-корр. РАН В.В. Пухначев

Ведущая организация: Институт физики Земли РАН
им. О.Ю. Шмидта, г. Москва

Защита состоится 8 декабря 2006 г. в 16 часов 20 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119899, г. Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан "1" ноября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук



А.Н. Осипов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Интерес к математическому моделированию вулканических извержений обусловлен необходимостью оценки прямой опасности, которую представляет распространение расплавленной магмы либо газо-пепельной смеси при извержениях вулканов, расположенных в густонаселенных районах. При экструзивном вулканическом извержении расплавленные магматические породы формируют течение тонкого слоя остывающей лавы на подстилающей поверхности. Гидродинамические модели экструзивных вулканических извержений позволяют оценить скорость лавового фронта по известным значениям параметров, характеризующих интенсивность извержения и физические свойства лавы, а также восстановить параметры извержения по данным полевых наблюдений.

Построение гидродинамических моделей лавовых течений стимулирует развитие асимптотических методов в механике жидкости, так как для геофизических приложений особенно важны приближенные аналитические либо автомодельные решения. Подавляющее большинство известных в литературе работ по моделированию лавовых течений посвящено течениям на горизонтальной либо наклонной *плоской* подстилающей поверхности. Оставлены без внимания эффекты криволинейности подложки, которые могут приводить к возникновению локальных максимумов скорости распространения лавового фронта. В литературе рассматривались задачи о течении тонкого слоя с затвердеванием, при котором фронт затвердевания распространяется от подстилающей поверхности внутрь слоя жидкости, тогда как для описания лавовых течений представляет интерес задача о затвердевании вблизи верхней границы течения. Настоящая работа направлена на устранение перечисленных пробелов в теоретическом описании лавовых течений.

Цели работы:

- построение двумерных и трехмерных асимптотических моделей неста-

ционарных неизотермических течений тонкого слоя сильновязкой жидкости на *криволинейной* подстилающей поверхности с учетом зависимости вязкости от температуры, интенсивного оттока тепла со свободной поверхности и затвердевания вблизи верхней границы течения

- нахождение аналитических, автомоделных и численных решений с целью определения закона движения лавового фронта и структуры лавового течения на неосесимметричной конической поверхности вулкана в зависимости от параметров извержения и геометрии подстилающей поверхности

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты, выносимые на защиту:

- в рамках приближения тонкого слоя методом сращиваемых разложений построено семейство асимптотических моделей нестационарного осесимметричного остывающего течения сильновязкой жидкости с локализованным массоподводом на искривленной твердой поверхности при экспоненциальной зависимости вязкости от температуры (параметр семейства – безразмерная интенсивность потока тепла на свободной границе)
- построены численные решения, описывающие неизотермическое течение как вблизи области массоподвода при малых углах наклона подстилающей поверхности к горизонтали, так и на значительном удалении от области массоподвода при конечных углах наклона подстилающей поверхности
- аналитически найдены все автомоделные решения, описывающие нестационарное изотермическое течение на поверхности конуса с конечным углом наклона образующей к горизонтали при точечном массоподводе в вершине и степенном либо экспоненциальном законе роста общего объема движущейся жидкости со временем; также получены реше-

ния, описывающие течения с подводом или отводом массы на переднем фронте течения

- в случае трехмерного изотермического течения от неосесимметричного источника, расположенного в вершине неосесимметричной конической поверхности с плавно меняющимися свойствами в азимутальном направлении, получено аналитическое автомодельное решение для закона движения переднего фронта течения
- для трехмерного течения на существенно неосесимметричной конической поверхности получено уравнение для формы свободной границы, которое учитывает перетекание жидкости в азимутальном направлении; при степенной зависимости общего объема движущейся жидкости от времени найдено автомодельное решение указанного уравнения и показано, что зависимость координаты переднего фронта течения от времени одинакова для всех конических поверхностей
- аналитически найдена стационарная форма свободной поверхности и построена картина линий тока вблизи переднего фронта произвольно неавтомодельного трехмерного течения на неосесимметричной конической поверхности
- построена асимптотическая модель процесса солидификации течения тонкого слоя сильновязкой жидкости на конической поверхности, при котором фронт солидификации распространяется от верхней границы течения внутрь слоя жидкости
- при больших числах Пекле найдено аналитическое стационарное решение для фронта солидификации в плоском либо осесимметричном течении и определен параметр подобия, который позволяет разделить режимы течения с полной солидификацией, стационарные течения с неподвижной твердой коркой и течения без образования твердой корки.

Научная и практическая значимость. Научная значимость работы состоит в развитии гидродинамических моделей лавового течения при экструзивном вулканическом извержении на искривленной подстилающей поверхности. Построены и исследованы асимптотические модели неизотермического течения на конической поверхности в широком диапазоне интенсивности потока тепла со свободной поверхности с учетом экспоненциальной зависимости вязкости жидкости от температуры и затвердевания на верхней границе течения. Получены аналитические решения, описывающие автомодельное изотермическое течение на поверхности конуса, структуру изотермического течения вблизи переднего фронта, а также распространение фронта солидификации в остывающем течении. Для трехмерных изотермических течений на неосесимметричной конической поверхности впервые выведено эволюционное уравнение для толщины слоя и найдено автомодельное решение для закона движения переднего фронта.

Практическая значимость работы определяется возможностью использовать полученные аналитические формулы для толщины лавового слоя, закона движения переднего фронта течения и времени полного затвердевания остывающего потока с целью определения интенсивности извержения и параметров лавы по известным данным наблюдений, оценки скорости движения лавового фронта по известным параметрам извержения, а также для интерпретации результатов экспериментов.

Апробация работы. Основные положения и результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались и обсуждались на I Ассамблее Европейского геофизического общества (Ницца, Франция, 2004 г.), XXI Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике (Варшава, Польша, 2004 г.), XII школе-семинаре "Современные проблемы аэрогидродинамики" (Сочи, 2004 г.), Конференции-конкурсе молодых ученых НИИ механики МГУ (Москва, 2004, 2005, 2006 гг.), Ломоносовских чтениях МГУ (Москва, 2005, 2006 гг.), Всероссийской конференции "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения" (Бийск, 2005 г.), Конферен-

ции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 2006 г.), Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006 г.).

За работы “Трехмерные течения лавы на неосесимметричной подстилающей поверхности” и “Асимптотические модели затвердевания течений тонкого слоя сильновязкой жидкости”, вошедшие в состав диссертации, автор удостоен звания победителя Конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ в 2005 и 2006 гг. соответственно.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы. В работе содержится 26 рисунков, 3 таблицы и 120 библиографических ссылок. Общий объем диссертации составляет 140 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы работы, приведена аннотация ее содержания, указаны цель и новизна исследований, отмечена их практическая ценность.

Глава I посвящена обзору литературы по гидродинамическим моделям лавовых течений. Во введении к обзору даны определения основных режимов вулканического извержения и указаны характерные параметры экструзивного извержения. Обсуждаются имеющиеся на сегодняшний день данные о реологии лавы. В разделе 1.2 рассмотрены известные изотермические модели лавового течения, основанные на приближении тонкого слоя сильновязкой ньютоновской либо вязкопластической жидкости. В разделе 1.3 указаны основные модели неизотермического тонкого слоя сильновязкой жидкости на горизонтальной либо наклонной плоскости. Раздел 1.4 посвящен моделям неизотермического тонкого слоя вязкой жидкости с затвердеванием либо проплавлением подстилающей поверхности. В выводах к обзору литературы указываются эффекты и процессы, обнаруженные экспериментально, но пока еще не нашедшие адекватного теоретического обоснования.

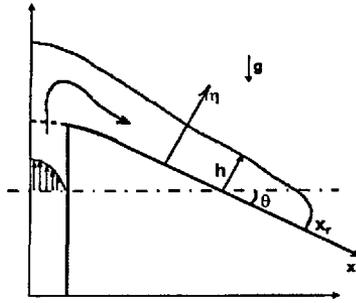


Рис. 1. Схема лавового течения на конической подстилающей поверхности (вертикаль-пос сечение).

В Главе II излагается гидродинамическая постановка задачи об остывающем течении лавы на осесимметричной искривленной поверхности (Рис. 1). В разделе 2.1 записаны уравнения Навье-Стокса для нестационарного неизотермического течения вязкой несжимаемой тяжелой жидкости со свободной границей на осесимметричной искривленной поверхности с учетом зависимости вязкости от температуры. На подстилающей поверхности вне области массоподвода задано условие прилипания, а внутри области массоподвода задан вертикальный профиль скорости. На свободной поверхности заданы стандартные кинематическое и динамическое граничные условия. Для температуры на подстилающей поверхности задано условие адиабатической стенки, а на свободной поверхности задан поток тепла как известная функция температуры свободной поверхности.

Вся область течения разбивается на две асимптотические подобласти: внешнюю и внутреннюю. Во внутренней области масштаб длины L выбран равным радиусу области массоподвода, а угол наклона образующей поверхности к горизонтали θ считается малым. В качестве масштаба скорости при обезразмеривании выбрана характерная продольная скорость течения. Во внешней области масштаб длины существенно превышает радиус области массоподвода, так что массоподвод можно считать точечным, а углы накло-

на образующей к горизонтали конечны. Постановка задачи в безразмерной форме содержит малый параметр $\varepsilon = \text{Fr}^2/\text{Re}$, который представляет собой обратную величину к безразмерной силе тяжести. Решение ищем в приближении тонкого слоя в виде асимптотических рядов по ε , оставляя в них только главные члены. Вводятся два малых параметра ε_i и ε_e , вычисляемые по параметрам внутренней и внешней областей, соответственно.

В разделе 2.2 выводятся уравнения неизотермического тонкого слоя при малых углах наклона образующей поверхности к горизонтали θ . Считается, что число Рейнольдса $\text{Re} = o(\varepsilon_i^{-2/3})$. Уравнения движения и притока тепла в растянутых безразмерных переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \vartheta(x), \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -1 \quad (1) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial \eta} = k_1 \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}, \quad k_1 = \frac{\text{Ec}}{\text{Re}^{1/3} \text{Fr}^{4/3}}, \quad k_2 = \frac{1}{\text{Re}^{1/3} \text{Fr}^{4/3} \text{Pr}} \\ \eta = h: \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad p = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = -\varepsilon_i^{1/3} \text{Nu}_i F(T) \\ \eta = 0, \quad x < 1: \quad u = 0, \quad v = v_m, \quad T = 1; \quad x > 1: \quad u = v = \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \\ x = 0: \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0; \quad x = x_r(t): \quad h = 0 \end{aligned}$$

Здесь h – толщина слоя, η – поперечная координата, x_r – координата переднего фронта течения, $\vartheta = \varepsilon_i^{-1/3} \theta$ – растянутый угол наклона поверхности, $v_m(t, x)$ – профиль скорости массоподвода, остальные обозначения общепринятые. На основании оценки величины коэффициента k_1 для реальных лавовых течений диссипативной функцией в уравнении притока тепла пренебрегается. В разделе 2.3 выводится система уравнений неизотермического тонкого слоя при конечных углах наклона поверхности к горизонтали θ . Считается, что $\text{Re} = o(\varepsilon_e^{-1})$. Уравнения в растянутых безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad 0 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \sin \theta, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\cos \theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial \eta} = k_1 \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}, \quad k_1 = \frac{Ec}{Fr^2}, \quad k_2 = \frac{1}{Fr^2 Pr} \quad (2)$$

$$\eta = h, \quad x > 0: \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad p = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = -\varepsilon_e^{1/2} Nu_e F(T)$$

$$\eta = 0, \quad x > 0: \quad u = v = \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0, \quad x = x_r(t): \quad h = 0$$

Как и в случае малых θ , диссипативной функцией в уравнении притока тепла пренебрегается. Динамическое уравнение полученной системы (2) содержит лишь проекцию силы тяжести и производную касательного напряжения и не содержит самондущированного продольного градиента давления, что является принципиальным отличием от системы уравнений (1) для случая малых θ .

Все безразмерные параметры считаются известными, кроме безразмерной величины потока тепла Nu на свободной поверхности. В целях построения наиболее общей модели были рассмотрены все асимптотически различные значения Nu . Используя соотношение между масштабами длины во внутренней и внешней областях, находится соотношение между величинами малых параметров, которое позволяет переписать граничные условия для температуры на свободной поверхности в обеих областях с использованием одного малого параметра. В зависимости от порядка величины Nu_e существует пять асимптотически различных вариантов постановки граничных условий, которые приведены в табл. 1.

Таблица 1

	Порядок Nu_e	Внутренняя область	Внешняя область
1	$Nu_e \ll \varepsilon_e^{-3/8}$	$\partial T_i / \partial \eta_i = 0$	$\partial T_e / \partial \eta_e = 0$
2	$Nu_e \sim \varepsilon_e^{-3/8}$	$\partial T_i / \partial \eta_i = -F(T_i)$	$\partial T_e / \partial \eta_e = 0$
3	$\varepsilon_e^{-3/8} \ll Nu_e \ll \varepsilon_e^{-1/2}$	$F(T_i) = 0$	$\partial T_e / \partial \eta_e = 0$
4	$Nu_e \sim \varepsilon_e^{-1/2}$	$F(T_i) = 0$	$\partial T_e / \partial \eta_e = -F(T_e)$
5	$\varepsilon_e^{-1/2} \ll Nu_e$	$F(T_i) = 0$	$F(T_e) = 0$

В Главе III найдены стационарные решения полученных уравнений в случае, когда интенсивность потока тепла на свободной поверхности мала и течение можно считать изотермическим (условие 1 табл. 1). В разделе

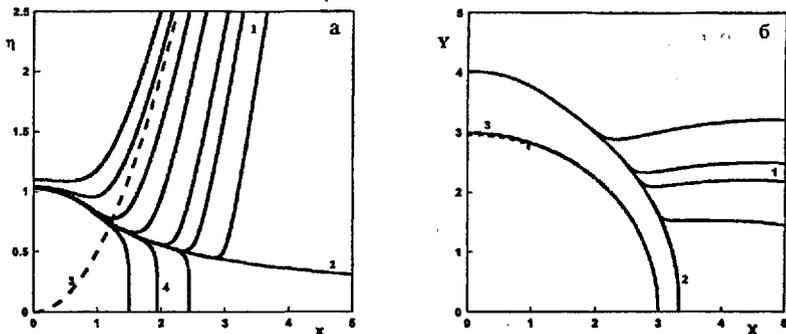


Рис. 2. Формы свободной поверхности на сфере для внутренней области. В системе координат, связанной со сферой: 1 – растущие решения, 2 – сепаратриса, 3 – асимптотика растущих решений, 4 – убывающие решения (а). В декартовой системе координат: 1 – линии постоянного уровня, 2 – сепаратриса, 3 – сфера; штриховой линией показана область массоподвода (б).

3.1 при малых θ из уравнений (1) получено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для формы свободной поверхности, которое при фиксированном значении расхода из области массоподвода имеет однопараметрическое семейство решений. На Рис. 2 представлено семейство решений в случае, когда течение происходит на участке сферической поверхности.

В разделе 3.2 при конечных θ из уравнений (2) найдено аналитическое стационарное решение для формы свободной поверхности

$$h(x) = \left(\frac{6}{x \sin 2\theta} \right)^{1/3}$$

Это решение можно срастить лишь с единственным решением во внутренней области, которое убывает на бесконечности (кривая 2 на Рис. 2, а). Таким образом, методом сращиваемых асимптотических разложений построено решение для формы свободной границы, равномерно пригодное в обеих областях.

В Главе IV исследованы нестационарные изотермические решения систем (1) и (2). В разделе 4.1 рассмотрены течения на поверхности конуса

от точечного источника в вершине при конечных θ . Из системы (2) получено гиперболическое уравнение для формы свободной поверхности

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3x} \frac{\partial(xh^3)}{\partial x} \sin \theta = 0 \quad (3)$$

Показано, что для этого уравнения существуют автомодельные решения лишь в тех случаях, когда общий объем движущейся жидкости зависит от времени по степенному или экспоненциальному закону. С помощью автомодельной замены переменных уравнение (3) сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению, для которого при каждом фиксированном законе массоподвода аналитически найдено однопараметрическое семейство решений с разрывом на переднем фронте течения. В качестве примера на Рис. 3 представлено найденное семейство решений для случая, когда общий объем жидкости растет со временем по степенному закону Qt^{γ} .

В разделе 4.2 проведено обсуждение полученных решений. Единственное решение из семейства отбирается из закона сохранения массы на переднем фронте течения, а остальные решения соответствуют течениям с подводом либо отводом массы на переднем фронте.

Закон движения переднего фронта течения в размерной форме имеет вид:

$$x_r^* = z_r \left[\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \right]^{1/5} \left(\frac{\rho g Q^2}{\mu} \right)^{1/5} (t^*)^{(2\gamma+1)/5} \quad (4)$$

Здесь константа z_r выражается интегрально через решение для формы свободной поверхности в автомодельных переменных и зависит только от γ . Полученный закон движения лавового фронта существенно отличается от соответствующего закона для течения на горизонтальной либо наклонной плоскости. В разделе 4.3 получены аналогичные автомодельные решения уравнения (3) в случае экспоненциального закона массоподвода. Раздел 4.4 посвящен течениям на поверхности с малыми углами наклона. Из системы

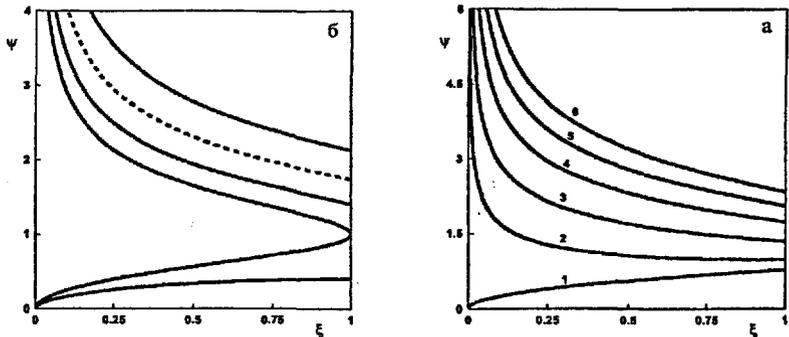


Рис. 3. Семейства автомодельных решений для формы свободной поверхности на конусе при $\gamma = 2$; пунктир - решение без потока массы через передний фронт; выше пунктирной линии - решения при массоотводе на фронте, ниже - решения при массоподводе на фронте (а). Автомодельные решения для формы свободной поверхности без потока массы через передний фронт при $\gamma = 0, 0.3, 1, 2, 3, 4$ - кривые 1-6 (б)

(1) получено параболическое уравнение для формы свободной поверхности

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3x} \frac{\partial}{\partial x} \left[xh^3 \left(v(x) - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] = v_m(t, x)$$

Даже при отсутствии масштаба длины в граничных условиях данное уравнение не имеет автомодельных решений, однако на основе численного решения показано, что в случае степенного закона массоподвода решения данного уравнения имеют автомодельные асимптотики, совпадающие с автомодельным решением для течения на конусе с конечным углом наклона образующей к горизонту.

Глава V посвящена обобщению полученного автомодельного решения на случай течения на неосесимметричной конической поверхности $\theta = \theta(\varphi)$ с неосесимметричным источником в вершине, где φ - азимутальный угол. В разделе 5.1 уравнения Навье-Стокса записаны в криволинейной системе координат, связанной с конической поверхностью. В разделе 5.2 для случая течения на конической поверхности с плавно меняющимися свойствами в азимутальном направлении ($\theta'(\varphi) \ll 1$) для формы свободной поверхности получено такое же уравнение (3), как в случае круглого конуса, в котором

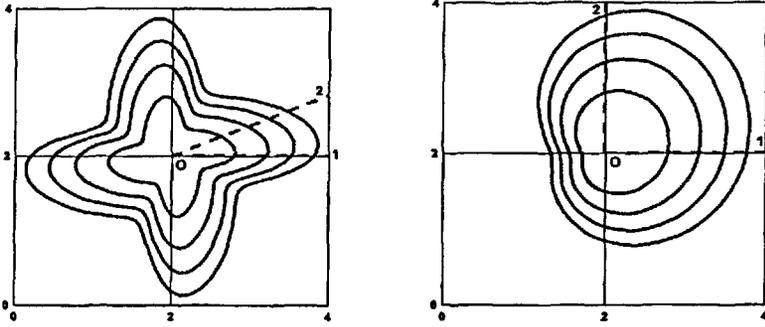


Рис. 4. Зависимость координаты переднего фронта от азимутального угла φ при течении на конических поверхностях $\theta(\varphi) = \pi/3 + (\pi/12) \cos(4\varphi)$ (а) и $\theta(\varphi) = \pi/4 + (\pi/6) \cos(\varphi)$ (б) от неосесимметричного стационарного источника $Q_s(\varphi) = 2 + \sin 4\varphi$ (а) и $Q_s(\varphi) = 1.1 + \sin \varphi$ (б). Штриховые линии – направления максимумов угла наклона образующей 1 и интенсивности массоподвода 2. Интервал времени постоянный.

$\theta = \theta(\varphi)$. При выводе этого уравнения пренебрегается перетеканием жидкости в азимутальном направлении. Обобщенное автомодельное решение для закона движения переднего фронта в случае течения от неосесимметричного источника на неосесимметричной конической поверхности имеет вид

$$x_r^*(t^*, \varphi) = z_r(\gamma) \left[\frac{Q_s^2(\varphi) \sin \theta(\varphi)}{\cos^2 \theta(\varphi)} \right]^{1/5} \left(\frac{\rho g Q^2}{\mu} \right)^{1/5} (t^*)^{(2\gamma+1)/5}$$

Здесь $Q_s(\varphi)$ – азимутальное распределение интенсивности массоподвода. На Рис. 4 показаны положения переднего фронта течения на различных поверхностях, описываемые данным автомодельным решением. В разделе 5.3 для трехмерного течения на существенно неосесимметричной конической поверхности ($\theta'(\varphi) \sim 1$) получены уравнения изотермического тонкого слоя, которые в растянутых безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial u H}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v H}{\partial \eta} = 0, \quad H = x \sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta} \quad (5)$$

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \sin \theta, \quad 0 = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\theta' \cos \theta}{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta}}, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta}}$$

$$\eta = h, \quad x > 0: \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{w}{H} \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, \quad p = 0$$

$$\eta = 0, \quad x > 0: \quad u = w = v = 0; \quad x = x_r(t, \varphi): \quad h = 0$$

Интегрирование полученных уравнений поперек слоя приводит к гиперболическому уравнению для формы свободной поверхности, которое учитывает перетекание жидкости в азимутальном направлении

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3x} \frac{\partial(xh^3)}{\partial x} \sin \theta + \frac{1}{3x\sqrt{\theta^2 + \cos^2 \theta}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h^3 \theta' \cos \theta}{\sqrt{\theta^2 + \cos^2 \theta}} \right) = 0 \quad (6)$$

При степенном законе массоподвода данное уравнение с помощью такой же автомодельной замены, как и в случае круглого конуса (3), сведено к уравнению, зависящему только от продольной автомодельной координаты и азимутального угла. Из вида автомодельной замены следует, что зависимость координаты переднего фронта от времени $x_r = \xi_r(\varphi)t^{(2\gamma+1)/5}$ одинакова для всех конических поверхностей. Здесь коэффициент $\xi_r(\varphi)$ определяется конкретным видом функций $\theta(\varphi)$ и $Q_s(\varphi)$. В разделе 5.4 получены стационарные решения для формы свободной поверхности в случаях $\theta'(\varphi) \ll 1$ и $\theta'(\varphi) \sim 1$.

В разделе 5.5 решена задача о структуре течения в окрестности переднего фронта произвольного неавтомодельного течения на неосесимметричной конической поверхности. На основе уравнений (5) было построено двухмасштабное разложение для толщины слоя, позволяющее получить непрерывное решение в окрестности переднего фронта. Внешним решением этого разложения является разрывное автомодельное решение. Внутреннее решение ищется в $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности переднего фронта течения из уравнений тонкого слоя (5) с учетом старшего внепорядкового члена с продольным градиентом давления

$$\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \sin \theta$$

Остальные уравнения и граничные условия системы (5) остаются без изменений. Интегрируя динамические уравнения и уравнение неразрывности с учетом указанного слагаемого, получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3x} \frac{\partial}{\partial x} \left[xh^3 \left(\sin \theta - \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{\theta^2 + \cos^2 \theta}} \right) \right] +$$

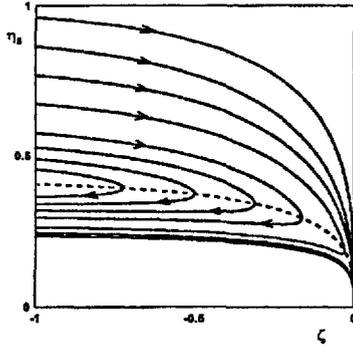


Рис. 5. Аналитическое решение для формы свободной поверхности и картина линий тока вблизи переднего фронта течения в движущейся системе координат. Стрелочками показано направление течения.

$$+ \frac{1}{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h^3 \theta' \cos \theta}{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta}} \right) = 0; \quad x = x_r; \quad h = 0 \quad (7)$$

Для построения внутреннего решения в $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности переднего фронта были введены внутренние переменные, в которых при переходе к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (7) сведено к обыкновенному уравнению, зависящему от t и φ как от параметров. Решение полученного уравнения найдено аналитически (Рис. 5)

$$h_n + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - h_n}{1 + h_n} \right) = \zeta$$

Здесь h_n и ζ – соответственно безразмерные растянутые толщина слоя и продольная координата, отсчитываемая от переднего фронта. Также аналитическими методами найдено поле скоростей и построена картина линий тока (Рис. 5).

В главе VI были исследованы численные решения систем уравнений (1) и (2) в случае неизотермического течения. Для удобства численного решения введена новая поперечная координата, растянутая на величину толщины слоя. В разделах 6.1 и 6.2 системы уравнений (1) и (2) переписаны в новых переменных, что позволило затем искать решение этих уравне-

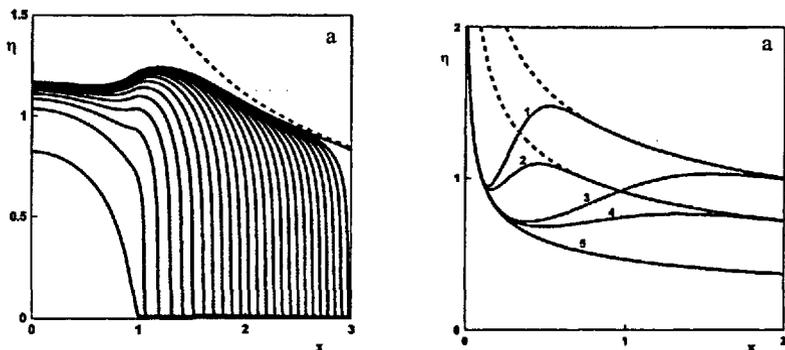


Рис. 6. Положения свободной поверхности через равные промежутки времени во внутренней области для $n = 2$, $k_2 = 1$ при заданном потоке тепла на свободной границе (условие 2 табл. 1) (а). Стационарные решения для формы свободной поверхности во внешней области при заданном потоке тепла на свободной границе (условие 4 табл. 1). Кривые 1-2 соответствуют $k_2 = 1$, $n = 3$ и 2; кривые 3-4 - $k_2 = 0.1$, $n = 3$ и 2; линия 5 - изотермическое решение при $T = 1$ (б)

ний в прямоугольной стационарной области с известной границей. Раздел 6.3 посвящен описанию численного метода. Системы уравнений решались конечно-разностным методом на прямоугольной сетке. Для каждой системы уравнений была составлена неявная по времени схема. В начальный момент времени задавался тонкий слой конечной толщины с однородным распределением температуры во всей расчетной области (так называемый предвестник). Профиль скорости массопотока задавался в форме Пуазейля, поток тепла на свободной поверхности принимался в виде линейной функции температуры свободной поверхности, а вязкость считалась экспоненциальной функцией температуры.

В разделе 6.4 представлены результаты расчетов систем уравнений во внутренней и внешней областях. Показано, что нестационарные формы свободной поверхности ограничены стационарными изотермическими решениями, соответствующими вязкости лавы при температурах извержения и окружающей среды (Рис. 6). В области интенсивного остывания возникает локальный максимум толщины слоя, где форма свободной поверхности

приближается к изотермическому решению, соответствующему температуре окружающей среды. При этом ширина области интенсивного остывания растет при уменьшении параметра k_2 в уравнении притока тепла (1), то есть при увеличении вязкости и теплоемкости лавы, поступающей из жерла вулкана. Показано, что в пределе $k_2 \rightarrow 0$, соответствующем реальному лавовому течению во внутренней области, течение происходит в изотермическом режиме и решение для формы свободной поверхности выходит на соответствующее стационарное изотермическое решение. Для течения во внешней области построены стационарные решения для формы свободной поверхности, соответствующие различным зависимостям вязкости лавы от температуры (Рис. 6, б). На этих решениях вязкость жидкости изменяется на несколько порядков величины в области течения. Построенные решения могут быть использованы для описания так называемых ползущих лавовых течений.

В главе VII построены асимптотические модели процесса затвердевания (солидификации) неизотермического течения на поверхности конуса. В разделе 7.1 излагается постановка задачи. Считается, что вследствие интенсивного оттока тепла со свободной поверхности фронт солидификации распространяется от верхней границы течения внутрь слоя жидкости. Предполагается, что жидкость и твердое вещество неразличимы по физическим свойствам и имеют одинаковую температуру затвердевания и плавления соответственно. Зависимостью вязкости и теплопроводности от температуры пренебрегается. Течение в слое жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса и притока тепла. Распространение тепла в твердом веществе описывается уравнением теплопроводности. Предполагается, что характерная скорость течения существенно больше, чем скорость распространения фронта солидификации, тогда форма верхней твердой границы определяется из стационарного решения для формы свободной поверхности (глава III). На нижней твердой границе слоя жидкости задается условие прилипания для скорости. Поток тепла в подстилающую поверхность

пренебрегается. На верхней границе твердого слоя задается фиксированная температура внешней среды. На фронте солидификации задается температура, равная температуре солидификации, условие прилипания для скорости и условие Стефана для скорости распространения фронта солидификации. В рамках изложенной постановки задачи в разделе 7.2 в приближении тонкого слоя получены следующие уравнения в растянутых безразмерных переменных:

$$h_s^2 \frac{\partial T_1}{\partial t} + \text{Pe}_m 6\xi(1 - \xi) \frac{h_s}{x} \frac{\partial T_1}{\partial x} - h_s \xi \frac{\partial h_s}{\partial t} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} \quad (8)$$

$$\xi = 1: T_1 = 0; \quad \xi = 0: \frac{\partial T_1}{\partial \xi} = 0, \quad \text{Pe}_m = \varepsilon \text{Pe} = \text{Fr}^2 \text{Pr}$$

$$x \rightarrow 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1: T_1 = 1; \quad t = 0: T_1 = 1$$

$$(h - h_s)^2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - (1 - \chi)(h - h_s) \frac{\partial h_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial \chi^2} \quad (9)$$

$$\chi = 0: T_2 = 1; \quad \chi = 1: T_2 = 0; \quad t = 0: T_2 = 1 - \chi$$

$$S \frac{\partial h_s}{\partial t} = \frac{\Theta}{h - h_s} \frac{\partial T_2}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} - \frac{1 - \Theta}{h_s} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}, \quad S = \frac{c_L}{c \Delta T^*}, \quad \Theta = \frac{T_s - T_a}{T_e - T_a} \quad (10)$$

Здесь $\xi = \eta/h_s$, $\chi = (\eta - h_s)/(h - h_s)$, $T_1 = (T - \Theta)/(1 - \Theta)$, $T_2 = T/\Theta$, где $h_s(t, x)$ – фронт солидификации, $h(x)$ – верхняя граница твердого слоя, T_e и T_a – начальная температура жидкости и температура внешней среды, до которой жидкость остывает, T_s и Θ – размерная и безразмерная температура солидификации соответственно, S – число Стефана, T_1 и T_2 – нормированные температуры в жидкости и твердом веществе. Задача сведена к решению двух тепловых задач (8) и (9) с переменными коэффициентами в неподвижных прямоугольных областях. Эти задачи должны решаться совместно с уравнением (10) для фронта солидификации h_s , который входит в коэффициенты уравнений (8) и (9). Постановка задачи содержит три независимых безразмерных параметра S , Pe_m и Θ .

В разделе 7.3 рассмотрен асимптотический предел $S \rightarrow \infty$, $\text{Pe}_m \sim 1$ и $\Theta \sim 1$, который соответствует течениям при начальной температуре жидкости, близкой к температуре солидификации. В твердом веществе поддерживается стационарное линейное распределение температуры, а тепловая

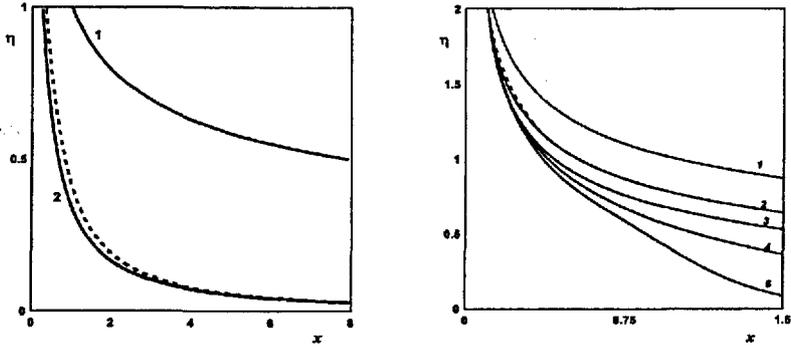


Рис. 7. Форма верхней твердой границы (1) и аналитическое стационарное решение для фронта солидификации (2) при $S \rightarrow \infty$ и $Pe_m \rightarrow \infty$. Штриховая линия – явная аппроксимация стационарного решения (а). Нестационарное решение для фронта солидификации при $S \sim 1$ и $Pe_m \sim 1$. Форма верхней границы твердого слоя (1) и положения фронта солидификации при $\tau = 0.1, 0.2, 0.4, 0.7$ (2–5). Штриховая линия – стационарная асимптотика (б).

задача в жидкости сведена к одному из вариантов классической задачи Гретца-Нуссельта о вынужденной стационарной конвекции в плоском канале. В случае, когда $Pe_m \rightarrow \infty$, в жидкости формируется тепловой пограничный слой, причем поток тепла на фронте солидификации находится аналитически из решения Левека. Задача о распространении фронта солидификации сведена к системе обыкновенных уравнений

$$\frac{dh_s}{d\tau} = \frac{C}{h_s \zeta^{1/3}} - \frac{1}{h - h_s}, \quad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{x}{6h_s} \quad (11)$$

$$\zeta(x) = \frac{1}{6} \int_0^x \frac{x_1 dx_1}{h_s}, \quad C = \frac{\sqrt[3]{3} Pe_m^{1/3} (1 - \Theta)}{\Gamma(\frac{1}{3}) \Theta}$$

Здесь $\tau = t\Theta/S$. Система (11) имеет аналитическое стационарное решение в неявном виде (Рис. 7)

$$h_s = \frac{Ch}{Z}, \quad 18C \left[\frac{Z^2}{2} - 2CZ + C^2 \ln \left(\frac{Z}{C} \right) + \frac{3}{2} C^2 \right] = \int \frac{x dx}{h(x)} \quad (12)$$

Здесь $Z = C + \zeta^{1/3}$. Стационарное решение существует только в том случае, если при $Pe_m \rightarrow \infty$ в уравнении (11) параметр $C = O(1)$. Если

$C \gg 1$, то течение развивается без образования верхней твердой корки. Если, наоборот, $C \ll 1$, то происходит полная солидификация течения. Аналогичное решение для плоского случая можно использовать при описании течений лавы в так называемых лавовых трубах, формирующихся на склонах вулканов при затвердевании верхнего слоя лавового течения.

В случае $Re_m \sim 1$ показано, что фронт солидификации не имеет стационарного решения. Нестационарное решение для фронта солидификации находилось численно с использованием потока тепла из жидкости, найденного из решения задачи Гретца-Нуссельта. Из полученного решения следует, что уже при конечных x слой жидкости полностью остывает до температуры солидификации, что позволяет пренебречь потоком тепла из жидкости и получить приближенное аналитическое решение для фронта солидификации и времени полного затвердевания течения.

В разделе 7.4 система уравнений (8)-(10) исследовалась численно в случае $S \sim 1$. В асимптотическом пределе $S \sim 1$, $Re_m \rightarrow \infty$ и $\Theta \sim 1$ задача (8)-(10) имеет стационарное решение, совпадающее с решением (12) для случая $S \rightarrow \infty$. Процесс выхода на стационарное решение был исследован численно. В самом общем случае $S \sim 1$, $Re_m \sim 1$ и $\Theta \sim 1$ стационарное решение отсутствует. Нестационарное решение было найдено численно (Рис. 7) и было показано, что качественные особенности распространения фронта солидификации описываются асимптотическим решением для случая $S \rightarrow \infty$.

Раздел 7.5 посвящен обсуждению полученных решений. Построенная модель солидификации имеет ограниченную область применимости по пространству. Данная модель применима в области $x \sim 1$ и не применима при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow 0$. Дополнительное ограничение на область применимости полученного стационарного решения накладывает тот факт, что в реальном течении твердая корка имеет конечное предельное напряжение, при котором происходит разлом. Таким образом, данная модель применима до тех пор, пока напряжение на твердой корке не достигнет предельного

значения. На основе приближенного аналитического решения для нестационарного фронта солидификации получена оценка характерного времени затвердевания течения

$$t_s^* = \frac{c_L}{\lambda(T_s - T_a)} \left(\frac{\rho \mu^2 Q^2}{g^2 L^2} \right)^{1/3}$$

Здесь c_L – удельная теплота кристаллизации, λ – коэффициент теплопроводности, Q – расход жидкости, остальные параметры указаны выше. Данная формула может быть использована не только для вычисления оценки времени полного затвердевания лавового течения по известным параметрам лавы, но и для восстановления параметров лавового течения по известному времени солидификации.

В Заключении к диссертации подведены итоги работы и указаны ее основные результаты.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В приближении тонкого слоя методом сращиваемых разложений построено семейство асимптотических моделей остывающего течения сильновязкой жидкости с локализованным массоподводом на искривленной твердой поверхности (параметр семейства – безразмерная интенсивность потока тепла на свободной границе). Проведены численные расчеты полученных уравнений и найдены нестационарные решения для формы свободной поверхности неизотермического течения, описывающие так называемое ползущее лавовое течение.

Аналитически найдены все автомодельные решения задачи об изотермическом течении на поверхности конуса с конечным углом наклона образующей к горизонтали при точечном массопроводе в вершине и степенном либо экспоненциальном законе роста общего объема движущейся жидкости со временем. Проведено обобщение построенных решений и получено аналитическое автомодельное решение для закона движения переднего фронта течения в случае трехмерного изотермического течения от неосесимметричного источника, расположенного в вершине неосесимметричной

конической поверхности с плавно меняющимися свойствами в азимутальном направлении.

Получено эволюционное уравнение для формы свободной границы трехмерного изотермического течения на существенно неосесимметричной конической поверхности, которое учитывает перетекание жидкости в азимутальном направлении. При степенной зависимости общего объема движущейся жидкости от времени найдено автомоделное решение указанного уравнения. Показано, что зависимость координаты переднего фронта течения от времени одинакова для всех конических поверхностей.

В рамках уравнений тонкого слоя с учетом старшего внепорядкового слагаемого с продольным градиентом давления аналитически найдено решение для формы свободной поверхности и картины линий тока вблизи переднего фронта произвольного неавтомоделного изотермического течения на неосесимметричной конической поверхности.

Построена асимптотическая модель процесса затвердевания течения тонкого слоя сильновязкой жидкости на наклонной криволинейной поверхности, при котором фронт затвердевания распространяется от верхней границы течения внутрь слоя жидкости. В различных асимптотических пределах получены аналитические решения для фронта затвердевания в плоском либо осесимметричном течении, а также определен параметр подобия, который позволяет разделить режимы течения с полным затвердеванием, стационарные течения с неподвижной твердой коркой и течения без образования твердой корки. Полученное стационарное решение для фронта затвердевания может быть использовано при описании течений в так называемых лавовых трубах.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Осипцов А.А., Стационарное пленочное течение сильновязкой тяжелой жидкости с массоподводом // Изв. РАН. МЖГ. 2003. N 6. С. 24-31.

2. Осипцов А.А., Автомодельное решение задачи о росте лавового купола на произвольной конической поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2004. N 1. С. 53-68.
3. Osipstov A.A., Barmin A.A., Isothermal lava dome growth on a curved substrate surface, Geophysical research abstracts (CD-ROM ISSN: 1029-7006), V. 6, Nice, 2004.
4. Osipstov A.A., Barmin A.A., Melnik O.E., The propagation of viscous gravity currents over a rigid conic surface, Abstr. Book and Proc. of Intern. Cong. Theor. Appl. Mech. (CD-ROM ISBN 83-89687-01-1), IPPT PAN, Warsaw, 2004.
5. Осипцов А.А., Гидродинамические модели лавовых течений при экстремальных вулканических извержениях, Тез. докл., XII школа-семинар "Современные проблемы аэрогидродинамики". М: Изд-во МГУ, 2004. С. 61.
6. Осипцов А.А., Асимптотические модели лавовых течений, Труды Конф.-конк. мол. учен., НИИ механики МГУ. М: Изд-во МГУ, 2004. С. 181-188.
7. Осипцов А.А., Неизотермические течения лавы на конической подстилающей поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2005. N 2. С. 62-75.
8. Осипцов А.А., Бармин А.А., Гидродинамика остывающих лавовых течений на конической подстилающей поверхности, Тез. докл. Конф. "Ломоносовские чтения", МГУ. М: Изд-во МГУ, 2005. С. 34-35.
9. Осипцов А.А., Бармин А.А., О.Э. Мельник, Асимптотические модели лавовых течений со свободной поверхностью, Тез. докл. Всеросс. конф. "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения", Бийск. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО РАН, 2005. С. 59-60.

10. Осипцов А.А., Трехмерные течения лавы на неосесимметричной подстилающей поверхности, Труды Конф.-конк. мол. учен., НИИ механики МГУ. М: Изд-во МГУ, 2005. С. 25-32.
11. Осипцов А.А., Трехмерные изотермические течения лавы на неосесимметричной конической поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2006. N 2. С. 31-45.
12. Осипцов А.А., Асимптотические модели лавовых течений на криволинейной твердой поверхности, Тез. докл. Всеросс. съезда по теор. и прикл. мех. Нижний Новгород: Изд-во НГУ, 2006. Т. 1. С. 162.

Подписано в печать 28.10.2006
Формат 60×88 1/16. Объем 1.75 п.л.
Тираж 100 экз. Заказ № 547
Отпечатано в ООО «Соцветие красок»
119992 г. Москва, Ленинские горы, д.1
Главное здание МГУ, к. А-102

